（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2009～2010 学年第二学期期末考试试卷

《高等数学 A》（下）试题答案

1．（本题满分 48 分，每小题 8 分）（1）$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+e^z}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{e^z}{(1+e^z)^3}$；

（2）$f(0,0)=10$为极大值；（3）$\dfrac{3}{64}\pi^2$；（4）$\dfrac{16}{5}a^2$；（5）$-\dfrac{1}{15}$；（6）收敛半径：$R=16$，收敛域：$(-16,16)$。

2．（本题满分 10 分）**解** 椭球面在第一卦限上的点$P(x,y,z)$（$x,y,z>0$）处的切平面的方程为

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0,$$

即

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1,$$

此平面在三个坐标轴的截距分别为$\dfrac{a^2}{x}$，$\dfrac{b^2}{y}$，$\dfrac{c^2}{z}$，因此它与三个坐标平面所围四面体的体积为

$$V=\frac{a^2b^2c^2}{6xyz}。$$

显然只要求出$1/V$的最大值，便能求出V的最小值。因此问题可以转化为求目标函数$f(x,y,z)=xyz$在约束条件$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的最大值问题。

为此，作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

并令

$$\begin{cases} L'_x=yz-\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ L'_y=xz-\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ L'_z=xy-\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0,\\ L'_\lambda=1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0. \end{cases}$$

注意$x,y,z>0$（此时$\lambda\neq 0$），由方程组的第一、第二和第三式得$\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$，

代入第四式得

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}a\text{，}\quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}b\text{，}\quad z=\frac{\sqrt{3}}{3}c\text{。}$$

显然，这个驻点必是 f 在约束条件下的最大值点，其最大值为

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}abc\text{。}$$

于是便得到V 的最小值为$V_{\min}=\dfrac{a^2b^2c^2}{6xyz}=\dfrac{\sqrt{3}abc}{2}$。

3．（本题满分 8 分）**解** 添加线段$\overline{BA}$：$y=0$，$x:\pi\to 0$。设曲线L与$\overline{BA}$所围区域为D，则由 Green 公式得

$$\left(\int_L+\int_{\overline{BA}}\right)(\sin y+y)dx+x\cos ydy=\iint_D dxdy$$

$$=\int_0^{\pi}dx\int_0^{x(\pi-x)}dy=\int_0^{\pi}x(\pi-x)dx=\frac{1}{6}\pi^3.$$

且

$$\int_{\overline{BA}}(\sin y+y)dx+x\cos ydy=\int_{\pi}^{0}0dx=0.$$

于是

$$\int_L(\sin y+y)dx+x\cos ydy$$

$$=\iint_D dxdy-\int_{\overline{BA}}(\sin y+y)dx+x\cos ydy=\frac{1}{6}\pi^3.$$

4．（本题满分 8 分）**解** 直接计算得

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=r\text{，}\qquad \frac{D(y,z)}{D(r,\theta)}=\sin\theta\text{，}\qquad \frac{D(z,x)}{D(r,\theta)}=-\cos\theta\text{，}$$

所以

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{\left[\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right]^2+\left[\frac{D(y,z)}{D(r,\theta)}\right]^2+\left[\frac{D(z,x)}{D(r,\theta)}\right]^2}=\sqrt{1+r^2}\text{。}$$

于是

$$\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}dS=\iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi,\\ 0\le r\le 1}}r\sqrt{1+r^2}drd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}dr$$

$$=2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}dr=\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

5.（本题满分 10 分）解（1）

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^x+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}dx=\frac{2}{\pi},$$

且对 $n=1,2,\cdots$，有

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{e^x+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi(e^{\pi}-e^{-\pi})}\left[\int_0^{\pi}e^x\cos nxdx+\int_0^{\pi}e^{-x}\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi(e^{\pi}-e^{-\pi})}\left\{\left[\frac{e^x}{n^2+1}(n\sin nx+\cos nx)\right]\Bigg|_0^{\pi}+\left[\frac{e^{-x}}{n^2+1}(n\sin nx-\cos nx)\right]\Bigg|_0^{\pi}\right\}$$

$$=\frac{2(-1)^n}{\pi(n^2+1)}.$$

因此由收敛定理

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx,\quad x\in[0,\pi]。$$

（2） 在（1）的结果中令 $x=\frac{\pi}{2}$ 得

$$\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos n\frac{\pi}{2}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}-e^{-\pi}},$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+4n^2}=\frac{\pi}{2}\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{1}{2}。$$

6.（本题满分 8 分）解 由 Gauss 公式得

$$\iint_{\Sigma}xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy=\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz。$$

作变换 $x=au$， $y=bv$， $z=cw$ 得

$$\iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=abc\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)dudvdw。$$

由对称性知

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}u^2dudvdw=\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}v^2dudvdw=\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}w^2dudvdw,$$

因此

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)dudvdw\\&=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}(u^2+v^2+w^2)dudvdw\\&=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi dr=\frac{4}{15}(a^2+b^2+c^2)\pi.\end{aligned}$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}xy^2dydz+yz^2dzdx+zx^2dxdy=\frac{4}{15}abc(a^2+b^2+c^2)\pi\text{。}$$

7.（本题满分 10 分）（1）**解** 记$u_n=\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$。对于每个$x\ne 0$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{2n+3}=0,$$

所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$收敛。因此幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$的收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

（2）**证** 对$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$逐项求导得

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}\right)'=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)!!}=1+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}=1+xS(x)\text{。}$$

注意到$S(0)=0$，所以$S(x)$是一阶线性方程

$$S'-xS=1$$

满足$S(0)=0$的特解，因此

$$S(x)=e^{\int_0^x tdt}\int_0^x e^{-\int_0^t sds}dt=e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad x\in(-\infty,+\infty)\text{。}$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}S(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\text{。}$$