复旦大学数学科学学院

2007～2008 学年第二学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学 A（下）　　课程代码：$MATH120002$

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓　名：＿＿＿＿＿＿　学　号：＿＿＿＿＿＿　专　业：＿＿＿＿＿＿

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									

1.（本题共四小题，每小题 5 分，共 20 分）

（1）设 $u=\sin(3x-2y)$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$；

解. $u_x = 3\cos(3x-2y)$

$u_{xy} = 6\sin(3x-2y)$

（2）求曲面 $e^z+z+xy=3$ 在点（2，1，0）处的切平面方程；

解. 记 $F(x,y,z)=e^z+z+xy-3$，$F_x(2,1,0)=1$，$F_y(2,1,0)=2$，

$F_z(2,1,0)=2$. 切平面为 $(x-2)+2(y-1)+2z=0$，即

$x+2y+2z-4=0$

（3）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+4}(x-2)^n$ 的收敛半径和收敛域；

解. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{(-1)^n}{n+4}\right|}=1$，故收敛半径 $R=1$，$x=3$ 时，级数为 $\sum\dfrac{(-1)^n}{n+4}$，收敛，

$x=1$ 时，级数为 $\sum_1^{\infty}\dfrac{1}{n+4}$，发散，故原级数收敛域为 $(1,3]$.

（4）求解微分方程 $(e^{x+y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$。

解. 原方程即 $e^x(e^y-1)dx=-e^y(e^x+1)dy$，$\dfrac{e^x dx}{e^x+1}=-\dfrac{e^y dy}{e^y-1}$

$\therefore \ln(e^x+1)=-\ln(e^y-1)+C_1$，即方程的解为

$(e^x+1)(e^y-1)=C$

2.（本题共四小题，每小题 5 分，共 20 分）

（1）计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为圆盘 $x^2+y^2\le 4$；

解 $$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{r^2}r\,dr=2\pi\cdot\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^2$$

$$=\pi(e^4-1).$$

（2）设 L 是连接 $O(0,0,0)$ 和 $P(2,1,2)$ 的直线段，计算积分 $\int\limits_L (x+y+z)^2ds$；

解. L 即 $\begin{cases}x=2t\\ y=t\\ z=2t\end{cases}\quad 0\le t\le 1.$

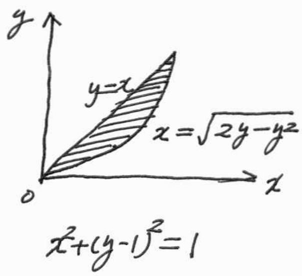
$$\int\limits_L (x+y+z)^2ds=\int_0^1(2t+t+2t)^2\sqrt{2^2+1+2^2}\,dt=3\cdot 25\int_0^1 t^2dt$$

$$=25.$$

（3）把积分 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$ 表示为先对 y 再对 x 的二次积分；

解. $$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx$$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\,dy.$$



（4）计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$ 其中 Σ 是区域 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 1, 1\le z\le 2\}$ 边界曲面的外侧。

解. 记 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 1\le z\le 2\}$，由 Gauss 公式

$$\iint\limits_\Sigma x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=\iiint\limits_\Omega (1+1+1)\,dv$$

$$=3\pi$$

3.（本题 10 分）在椭球面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使得函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在该点处沿 $l=(1,-1,0)$ 方向的方向导数最大。

解. $\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}\,u\cdot\frac{l}{\|l\|}=2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2y\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}(x-y)$

记 $L(x,y,z,\lambda)=x-y+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$

$$\begin{cases} L_x=1+4\lambda x=0 \\ L_y=-1+4\lambda y=0 \\ L_z=2\lambda z=0 \\ L_\lambda=2x^2+2y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

得 $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$
$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)}=\sqrt{2}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}=-\sqrt{2}$

∴ 所求的点为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$.

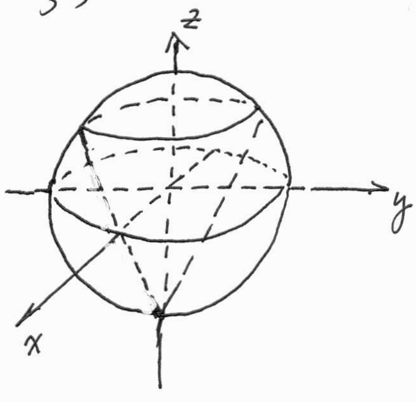
4.（本题 10 分）计算三重积分

$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz$$

其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 2\sqrt{x^2+y^2}-1\right\}$

解. $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $z=2\sqrt{x^2+y^2}-1$ 交线 $z=\frac{3}{5}$,

$x^2+y^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2$



$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{4}{5}}r\,dr\int_{2r-1}^{\sqrt{1-r^2}}\frac{z}{r}\,dz$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{4}{5}}\frac{1}{2}\left[(1-r^2)-(2r-1)^2\right]dr$$

$$=\pi\int_0^{\frac{4}{5}}(4r-5r^2)\,dr$$

$$=\frac{32}{75}\pi$$

5.（本题 10 分）将 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ 展开为 *Maclaurin* 级数，写出其收敛域，并求出 $f^{(4)}(0)$。

解. $f(x)=\ln(2+x-3x^2)=\ln(1-x)+\ln(2+3x)$

$$=\ln 2+\ln(1-x)+\ln(1+\tfrac{3}{2}x)$$

$$=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+(-1)^n\left(\tfrac{3}{2}\right)^n\right]\frac{x^n}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|1+(-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$ ， $\therefore R=\frac{2}{3}$

$x=-\frac{2}{3}$ 时，级数发散

$x=\frac{2}{3}$ 时，级数收敛，

$\therefore$ 级数收敛域为 $(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$.

$$f^{(4)}(0)=4!\cdot\frac{(-1)}{4}\left[1+\left(\tfrac{3}{2}\right)^4\right]=-\frac{291}{8}$$

6.（本题 10 分）设 $f(x)=\begin{cases}\pi, & \sqrt{\pi}<x<\pi\\ -\pi, & 0\le x\le\sqrt{\pi}\end{cases}$，将 $f(x)$ 展开为以 2π 为周期的余弦级数，求其和函数在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的值，并分别求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sqrt{\pi})}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\sqrt{\pi})}{n}$ 的和。

解. $b_n=0$，$a_0=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\sqrt{\pi}}(-\pi)\,dx+\int_{\sqrt{\pi}}^{\pi}\pi\,dx\right]=2(\pi-2\sqrt{\pi})$

$n\ge 1$ 时，$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\sqrt{\pi}}(-\pi)\cos nx\,dx+\int_{\sqrt{\pi}}^{\pi}\pi\cos nx\,dx\right]$

$$=2\left(-\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\sqrt{\pi}}+\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\sqrt{\pi}}^{\pi}\right)=-\frac{4}{n}\sin(n\sqrt{\pi})$$

$$f(x)\sim\pi-2\sqrt{\pi}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sqrt{\pi})}{n}\cos nx.$$

记其和函数为 $S(x)$，则 $S(\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})=-\pi$.

由 $S(0)=f(0)=-\pi$ 得 $\pi-2\sqrt{\pi}-4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sqrt{\pi})}{n}=-\pi$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sqrt{\pi})}{n}=\frac{\pi-\sqrt{\pi}}{2}$$

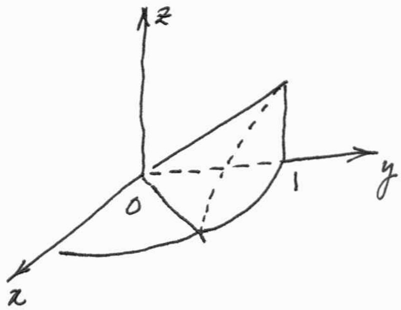
由 $S(\sqrt{\pi})=\frac{1}{2}\left[f(\sqrt{\pi}-0)+f(\sqrt{\pi}+0)\right]=0$ 得

$\pi-2\sqrt{\pi}-4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sqrt{\pi})\cos(n\sqrt{\pi})}{n}=0$，得

$\sum^{\infty}\sin(2n\sqrt{\pi})\ \ \pi$

7.（本题 10 分）设 Σ 为曲面 $\left\{(x,y,z)\,\middle|\, y^2 = x^2 + z^2, x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\right\}$，计算

（1）$\iint\limits_{\Sigma} z^2 dS$；



解. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$，$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \dfrac{\sqrt{2}\,y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$.

$$\iint\limits_{\Sigma} z^2 ds = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} (y^2 - x^2) \cdot \frac{\sqrt{2}\,y}{\sqrt{y^2 - x^2}}\, dy$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} y\sqrt{y^2 - x^2}\, dy$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_x^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

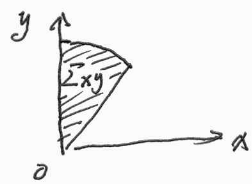
$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

（2）$\iint\limits_{\Sigma} z\, dydz$，其中 Σ 取上侧。

解. Σ 上侧对应的法向为 $(-z_x, -z_y, 1)$. $-z_x = \dfrac{2x}{2\sqrt{y^2 - x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}}$

$$\iint\limits_{\Sigma} z\, dydz = \iint\limits_{\Sigma_{xy}} \sqrt{y^2 - x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}}\, dxdy$$



$$= \iint\limits_{\Sigma_{xy}} x\, dxdy$$

$$= \int_0^1 r dr \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

8.（本题 10 分）设 φ 是二阶可导函数，$\varphi(1)=-1, \varphi'(1)=-4$ 且存在二元函数 $u=u(x,y)$ 使

$$du=4[\varphi(x)+2x^3]y\,dx+[3x\varphi(x)-x^2\varphi'(x)]dy$$

求 $\varphi(x)$ 和 $u(x,y)$。

解. 由全微分条件, 得 $\frac{\partial}{\partial x}[3x\varphi(x)-x^2\varphi'(x)]-\frac{\partial}{\partial y}\{4[\varphi(x)+2x^3]y\}=0$,

即 $3\varphi(x)+3x\varphi'(x)-2x\varphi'(x)-x^2\varphi''(x)-4\varphi(x)-8x^3=0$,

故 $x^2\varphi''(x)-x\varphi'(x)+\varphi(x)=-8x^3$

令 $x=e^t$, 得 $y=\varphi(x(t))$ 满足

$$y''-2y'+y=-8e^{3t}.$$

相应的齐次方程特征方程为 $(\lambda-1)^2=0$, 通解 $y=e^t(c_1+c_2t)$

设非齐次方程有解 $y^*=ae^{3t}$, 代入方程得 $a=-2$

$\therefore\ y=-2e^{3t}+e^t(C_1+C_2t)$

即 $\varphi(x)=-2x^3+x(C_1+C_2\ln x)$

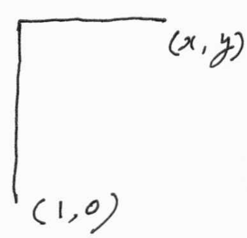
由 $\varphi(1)=-1$, 得 $C_1=1$, $\varphi'(1)=-4$ 得 $C_2=1$, 故得

$$\varphi(x)=-2x^3+x(1+\ln x)$$

$\therefore\ du=4[\varphi(x)+2x^3]y\,dx+[3x\varphi(x)-x^2\varphi'(x)]dy$

$=4x(1+\ln x)y\,dx+(x^2+2x^2\ln x)dy.$

$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}du(x,y)+C$



$=\int_0^y dy+\int_1^x 4x(1+\ln x)y\,dx+C$

$=y+4y\int_1^x x(1+\ln x)\,dx+C$

$=y+4y\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^x-\int_1^x\frac{x^2}{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right)+C$

$=x^2y(1+2\ln x)+C$