复旦大学数学科学学院

2010～2011 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学 A（上）　　课程代码：MATH120001

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓　名：　　　　学　号：　　　　专　业：

题 号	1	2	3	4	5	6	7	总 分
得 分								

（装订线内不要答题）

1．（本题满分 48 分，每小题 6 分）计算下列各题：

（1）设 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，求 y''；

（2）若当 $x\to 0$ 时，$e^{x^2}-(ax^2+bx+c)$ 是比 x^2 高阶的无穷小量，求 a，b，c；

（3）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$；

（4）设 n 为正整数，求函数 $f(x)=x^n e^{-x}$ （ $x>0$ ）的极值；

（5）求不定积分 $\int\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}dx$；

（6）计算反常积分$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^2dx$；

（7）求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$的秩；

（8）已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$有特征值$-1$，求$\boldsymbol{A}$对应于该特征值的全部特征向量。

2.（本题满分 8 分）问 a、b 为何值时，函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin a(x+1)}{x+1}, & x<-1, \\ b, & x=-1, \\ (2+x)^{\frac{1}{x+1}}, & x>-1\end{cases}$ 在 $x=-1$ 点连续？

3.（本题满分 8 分）求 A 的最小值，使得函数 $f(x)=5x^2+\dfrac{A}{x^5}$（$x>0$）的值不小于 28。

4.（本题满分 8 分）已知$\boldsymbol{a}_1=(1,0,3,0)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(0,3,-2,1)^T$，$\boldsymbol{a}_3=(1,1,0,0)^T$是$\mathbf{R}^4$中向量，求$\lambda$，$\mu$的值，使得$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}_1+\mu\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$分别与$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$正交。

5.（本题满分 9 分）问a，b为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解、无穷多解、无解？在方程组有解时，请求出解。

6.（本题满分 9 分）已知曲线$y=\int_0^x \sqrt{\sin t}\ dt$（$0 \le x \le \pi$）。

（1） 求该曲线的弧长；

（2） 证明该曲线与直线$x=\pi$， $y=0$所围平面图形的面积不小于π。

7.（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续二阶导数，且 $f''(x)\ge 0$（$x\in[a,b]$）。又已知 $\omega(x)$ 是在 $[a,b]$ 上连续的非负函数，且满足 $\int_a^b \omega(x)\,dx = 1$。证明：（1）$a \le \int_a^b x\omega(x)\,dx \le b$；

（2）$\int_a^b \omega(x) f(x)\,dx \ge f\left[\int_a^b x\omega(x)\,dx\right]$。