复旦大学数学科学学院

2016～2017 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学 A（上）　　课程代码：

开课院系：数学学院　　考试形式：闭卷

题 号	1	2	3	4	5	6	7	总 分
得 分								

一.简答题（本题共 40 分，每小题 5 分）

1.求 $y=e^{2x}\sin 3x$ 的二阶导数；

解：$y'=e^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x)$，$y''=e^{2x}(12\cos 3x-5\sin 3x)$。

2.计算 $\int \frac{2x+6}{x^2+2x+5}dx$；

解：原式$=\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx+4\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$

$$=\ln(x^2+2x+5)+2\arctan\frac{x+1}{2}+c$$

3.计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+1})$；

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}((n+1)^2-(n^2+1))}{(\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+1})(n+1+\sqrt{n^2+1})}=\frac{1}{2}$。

4.求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin 2x}\ln(1+t)dt}{x\ln(1+x)}$；

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin 2x}\ln(1+t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)\cdot 2\cos 2x}{2x}=2$。

5.计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$；

解：原式$=-9$。

姓　名：＿＿＿＿　学　号：＿＿＿＿　专　业：＿＿＿＿

（装订线内不要答题）

6.设矩阵 A,B 满足 $2AB=3A+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 B；

解：$(2A-I)B=3A$，$2A-I=\begin{pmatrix}1&2&0\\-2&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$，$(2A-I)^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}$，

所以 $B=3(2A-I)^{-1}A=\begin{pmatrix}-3&-3&6\\3&3&-3\\-6&-3&9\end{pmatrix}$。

7.求函数 $y=x^4-8x^2$ 的极值;

解： 易知 $y'=4x^3-16x$，驻点为 $x=0,2,-2$，利用 $y''=12x^2-16$ 的符号，可知 $x=0$ 是极大值点，$x=\pm 2$ 是极小值点，$y_{极大}=0, y_{极小}=-16$。

8. 计算 $\int_1^{+\infty}\frac{4x+2}{x^2(1+x^2)}dx$。

解：原式=$\int_1^{+\infty}\left(\frac{4x+2}{x^2}-\frac{4x+2}{1+x^2}\right)dx=2-\frac{\pi}{2}+2\ln 2$。

二.（本题 10 分）求由 $x^2+y^2=a^2$ 与 $y^2+z^2=a^2$ 所围立体在第一卦限部分的体积。

解：过 y 轴上点 y 处，作平行与 Ozx 面的平面截立体的截面为正方形，边长为 $\sqrt{a^2-y^2}$，

所以体积 $V=\int_0^a(a^2-y^2)dy=\frac{2}{3}a^3$。

三.（本题 10 分）设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ e, & x=0\end{cases}$，求 $f^{(4)}(0)$ 的值。

解： $f(x)=e\exp\{\frac{\ln(1+x)-x}{x}\}$

$$=e\left[1+\frac{\ln(1+x)-x}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^3+\frac{1}{24}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right)^4\right]+o(x^4)$$

$$=e\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+o(x^3)\right)^2\right]$$

$$+e\left[+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)^3+\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{2}x+o(x)\right)^4\right]+o(x^4)$$

$$=e\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{1}{24}\frac{2447}{240}x^4\right]+o(x^4)，$$

所以 $f^{(4)}(0)=\dfrac{2447}{240}e$。

四.（本题 10 分）求不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}dx$。

解：原式 $\displaystyle=\int\frac{\sec^8 x}{\tan^4 x}dx=\int\frac{(\tan^2 x+1)^3}{\tan^4 x}d\tan x$

$$=\frac{1}{3}(\tan^3 x-\cot^3 x)+3(\tan x-\cot x)+c。$$

五.（本题 10 分）将直线 $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ 绕直线 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ 旋转一周可得一个旋转曲面，求此旋转曲面的方程。

解：设 Σ 是所求曲面，任取 $P(x,y,z)\in\Sigma$，则 P 点由直线 l 上某点 $Q(x_0,y_0,z_0)$ 旋转所得，于是由点到直线的距离公式，可得

$$\frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{3}=\frac{(y_0-z_0)^2+(z_0-x_0)^2+(x_0-y_0)^2}{3},$$

又 $PQ\perp l_1$，所以 $x-x_0+y-y_0+z-z_0=0$，利用 $\begin{cases}x_0=2t+1\\ y_0=-t-1\\ z_0=2t\end{cases}$

可得 $xy+yz+zx+x+y+z+1=0$，这就是所求的旋转曲面的方程。

六.（本题 10 分）求使得下式成立的最小的 α：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}>e,n=1,2,\cdots$$

解：问题化为 $\alpha>\dfrac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}-n,\ \forall n$，

记 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x},\ x\in(0,1]$，

则 $f'(x)=-\dfrac{1}{\ln^2(1+x)}\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$，

记 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，

则 $g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x,\ g''(x)=\dfrac{2\ln(1+x)-2x}{1+x}<0$，

于是 $g'(x)$ 严格递减，当 $x \in (0,1]$， $g'(x) < g'(0) = 0$，

推出 $g(x)$ 严格递减，当 $x \in (0,1]$， $g(x) < g(0) = 0$，即得 $f'(x) < 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 严格递减， $f(x) < \lim\limits_{x \to o+0} f(x) = \frac{1}{2}$， $x \in (0,1]$，

这表明，满足条件的最小的 $\alpha = \frac{1}{2}$。

七.（本题 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导， $f(0)=0, f(1)=1$，证明：对任意的三个正数 a,b,c，存在三个不同的数 $x_i \in (0,1), i=1,2,3$，使得

$$\frac{a}{f'(x_1)} + \frac{b}{f'(x_2)} + \frac{c}{f'(x_3)} = a+b+c。$$

证: 对任意的三个正数 a,b,c， $0 < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+b}{a+b+c} < 1$，由连续函数介值定理，

$\exists p,q \in (0,1), p<q$，使得 $f(p) = \frac{a}{a+b+c}, f(q) = \frac{a+b}{a+b+c}$，

在 $[0,p],[p,q],[q,1]$ 上分别对 $f(x)$ 用 Lagrange 中值定理，

$\exists x_1 \in (0,p), x_2 \in (p,q), x_3 \in (q,1)$，使得

$$f(p) - f(0) = f'(x_1)p,\ f(q) - f(p) = f'(x_2)(q-p),\ f(1) - f(q) = f'(x_3)(1-q),$$

所以 $$\frac{a}{f'(x_1)} + \frac{b}{f'(x_2)} + \frac{c}{f'(x_3)} = a+b+c。$$