

## 复旦大学数学科学学院

2017~2018学年第一学期期末考试试卷

## A 卷

课程名称: 高等数学A(上) 课程代码: MATH120021  
 开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

题目	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

## 一、简单计算题(本题满分18分, 每小题6分)

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{1}{\sin x}}$ ;
2. 设  $f(x) = xe^x$ , 求  $f^{(n)}(x)$ ,  $n \geq 1$ ;
3. 求函数  $\arccos x$  的Maclaurin展开式(到4阶)。

二、计算下列各题(本题满分18分，每小题6分)

1. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x = t + \sin t$ 及 $y = \arctan t - y^3$  ( $t > 0$ )所确定,求 $\frac{dy}{dx}$ ;

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{n^2 + 3n^3} \right) \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k}{n}}$ ;

3. 已知 $f'(x) = \sqrt{1+x^2}$ ,  $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ , 且 $f(0) = g(0) = 0$ , 试求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} \right).$$

姓名

学号

专业

声明:我已知悉学校对于考试纪律的严肃规定,将秉持诚实守信宗旨,严守考试纪律,不作弊,不剽窃;若有违反学校考试纪律的行为,自愿接受学校严肃处理。

理。

学生(签名):

年 月 日

三、计算下列积分(本题满分24分, 每小题8分)

1.  $\int \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx;$

2.  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 2a \cos \theta + a^2} d\theta$ , 其中实数  $a > 1$ ;

3. 试用Beta函数表示  $\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)^b} dx$ , 其中  $a, b$  为实数且  $a > 0, 2b - a > 1$ 。



声明:我已知悉学校对于考试纪律的严肃规定,将秉持诚实守信宗旨,严守考试纪律,不作弊,不剽窃,若有违反学校考试纪律的行为,自愿接受学校严肃处理处

理。 \_\_\_\_\_ 年 \_\_\_\_\_ 月 \_\_\_\_\_ 日

学生(签名): \_\_\_\_\_

四、(本题满分8分) 已知平面  $\Sigma$  经过直线  $L : \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$  且与平面  $\Sigma_0 : 3x + z = 6$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 求  $\Sigma$  的方程。

五、(本题满分8分)设曲面 $\Sigma$ 是由平面曲线 $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$ )绕极轴旋转一周所成, 其中 $x$ 轴正向与极轴相重合。(1) 试写出 $\Sigma$ 在相应空间直角坐标系中的方程; (2) 求 $\Sigma$ 的面积。

姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 专业 \_\_\_\_\_

声明:我已知悉学校对于考试纪律的严肃规定,将秉持诚实守信宗旨,严守考试纪律,不作弊,不剽窃,若有违反学校考试纪律的行为,自愿接受学校严肃处理

理。 \_\_\_\_\_ 年 月 日  
学生(签名): \_\_\_\_\_

六、(本题满分8分)设 $a > 0$ ,试确定 $a$ 的范围使得曲线 $y = a^x$ 与直线 $y = x$ 必相交(要求说明理由)。

七、(本题满分8分)设函数 $f(x)$ 于 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \left(\int_0^x f(t)dt + \sqrt{3}\right)^2},$$

(1) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且其值小于 $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ; (2) 设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $x_{n+1} = \int_0^{x_n} f(t)dt$ ,  $n \geq 1$ ,  $x_1 \geq 0$ , 试证:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  存在且有限。



声明:我已知悉学校对于考试纪律的严肃规定,将秉持诚实守信宗旨,严守考试纪律,不作弊,不剽窃,若有违反学校考试纪律的行为,自愿接受学校严肃处理处

理。 \_\_\_\_\_ 年 \_\_\_\_\_ 月 \_\_\_\_\_ 日

学生(签名): \_\_\_\_\_

八、(本题满分8分) 设 $A = (a_{kj})_{3 \times 3}$ 是3阶实方阵,  $|A| \neq 0$ , 记 $D(x) = (a_{kj} + x)_{3 \times 3}$ 及 $g(x) = \det D(x)$ 。(1) 试求导数 $g'(x)$ 并证明:  $g'(0) = |A|\alpha^T(A^{-1})\alpha$ , 其中向量 $\alpha^T = (1, 1, 1)$ ; (2) 若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , 求 $g'(0)$ 。