（装订线内不要答题）

复旦大学数学科学学院

2013～2014 学年第一学期期末考试试卷

《高等数学 A》（上）A 卷试题答案

1．（本题满分 48 分，每小题 6 分）（1）$\dfrac{\sin(\ln x)-\cos(\ln x)}{x^2}$；（2）$\dfrac{1}{6}$；

（3）在 $[1, e^2]$ 上单调增加，在 $(0,1]$ 和 $[e^2, +\infty)$ 上单调减少。$f(1)=0$ 极小值，

$f(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$ 极大值；（4）$(0, 0)$；（5）$\dfrac{1}{2}\sin(2e^x)+C$；（6）$\dfrac{1}{2}$；

（7）可逆，$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$；（8）$a\neq 1$ 且 $b\neq 0$。

2．（本题满分 8 分）$F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3, & x\in[0,1), \\ x^2-\dfrac{2}{3}, & x\in[1,2]. \end{cases}$ $F(x)$ 在 $x=1$ 点不可导。

3．（本题满分 8 分）（1）$y=4x-3$（$(0,-3)$ 点）$y=-2x+6$（$(3,0)$ 点）；

（2）$\dfrac{9}{4}$。

4．（本题满分 8 分）$a<-\dfrac{1}{e}$ 时无实根；$a=-\dfrac{1}{e}$ 时有一个实根；$-\dfrac{1}{e}<a<0$ 时有两个实根；$a\geq 0$ 时有一个实根。

5．（本题满分 8 分）（1）$f(x)=e^x(x^2+2x-2)$；

（2）极大值为 $f(-4)=6e^{-4}$，极小值为 $f(0)=-2$。

6．（本题满分 10 分）（1）$a=-3$，$b=0$，ξ 所对应的特征值为 -1；

（2）不能对角化。

7．（本题满分 10 分）（1）$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$，$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx=(\sqrt{2}-1)\pi$；

（2）取 $n=\left[\dfrac{x}{\pi}\right]$，则

$$\int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt + \int_{k\pi}^{x} \frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt\text{，}$$

于是

$$\frac{n\pi}{\sqrt{2}} \le \int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt \le \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{2}}\text{。}$$

同理

$$(\sqrt{2}-1)n\pi \le \int_0^x \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\,dt \le (\sqrt{2}-1)(n+1)\pi\text{。}$$

于是

$$\frac{n}{n+1}(2-\sqrt{2}) \le \frac{\int_0^x \frac{\sin^2 t}{1+\cos^2 t}\,dt}{\int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt} \le \frac{n+1}{n}(2-\sqrt{2})\text{，}$$

令 $x \to +\infty$ 便得结论。