

4. 设 D 是曲线 $y = x \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴所围区域, 求区域 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

5. 设反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha |x-1|^\beta} dx$ 收敛, 求 α, β 的范围, 并在 α, β 平面直角坐标系上表示出来。

6. $-1 < \alpha < 0$, 讨论幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ 的收敛半径与收敛范围 (要求证明), 其中

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

7. 问 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 上是否连续? 是否可以逐项求导? 如果可以的话, 导函数是否连续? 证明你的断言。

8. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 单调增加, 证明: $\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx$ 。