《数学分析（III）》试题

2005.1

一．在球面$x^2+y^2+z^2=1$上找点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，满足$x_0>0$， $y_0>0$， $z_0>0$，使得该球面在点P_0处的切平面与三个坐标平面围成的四面体的体积最小。

二．求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$（$a>0$）被平面$z=\dfrac{a}{4}$与$z=\dfrac{a}{2}$所夹部分的面积。

三．计算二重积分 $\iint\limits_{D} \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^4}{x^2} dxdy$，其中 D 是由 x 轴，直线 $y=x$ 以及曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ 所围成的平面闭区域。

四．计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|} dxdydz$，其中 $\Omega=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$。

五． 计算曲线积分

$$\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,ds ,$$

其中L是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$（$a>0$）与平面$x=y$相交而成的圆周。

六．计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中$\Sigma$为锥面$x^2+y^2=z^2$在平面$z=0$与$z=h$（$h>0$）之间的部分，定向为下侧。

七．设 $A(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\mathbf{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\mathbf{j}$ 是右半平面 $D=\{(x,y)\mid x>0\}$ 上的向量场，试确定常数 λ，使得 $A(x,y)$ 为 D 上函数 $u(x,y)$ 的梯度场，并求出 $u(x,y)$。

八. 将 $f(x)=|\sin x|$（$-\pi\le x\le\pi$）展开为 Fourier 级数，并分别求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$ 的和。

九．设 $f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos xt}{t(1+t^2)}dt$， $x\in(-\infty,+\infty)$。

（1）证明积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos xt}{t(1+t^2)}dt$关于$x$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛；

（2）证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$；

（3）证明 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。