第四章

第 1 节

1．1.12克.

第 2 节

1．(1) $-f'(x_0)$；(2) $f'(x_0)$；(3) $2f'(x_0)$.

3．提示：证明 $f(1)=0$， $f'(1)=2$.

6．(1) 不可导点：$x=k\pi\ (k\in Z)$， $f'_-(k\pi)=-1$， $f'_+(k\pi)=1$；

(2) 不可导点：$x=2k\pi\ (k\in Z)$， $f'_-(2k\pi)=-\sqrt{2}$， $f'_+(2k\pi)=\sqrt{2}$；

(3) 不可导点：$x=0$， $f'_-(0)=1$， $f'_+(0)=-1$；

(4) 不可导点：$x=0$， $f'_-(0)=-1$， $f'_+(0)=1$.

7．(1) 可导；(2) $a=b=0$时可导，其他情况不可导；(3) 不可导；(4) $a<0$时可导，$a\geq 0$时不可导.

10．(1) 不一定；反例：$f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$， $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\infty$， $f'(x)=\frac{1}{x^2}(-1+\sin\frac{1}{x})$，

$\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=\infty$不成立.

(2) 不一定；反例：$f(x)=\sqrt{x}$.

第 3 节

3．(1) $3\cos x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$；

(2) $\cos x-x\sin x+2x$；

(3) $(2x+7)\sin x+(x^2+7x-5)\cos x$；

(4) $2x(3\tan x+2\sec x)+x^2(3\sec^2 x+2\tan x\sec x)$；

(5) $e^x(\sin x+\cos x)+4\sin x-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$；

(6) $(1+2\cos x-2^x\ln 2)x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}(x+2\sin x-2^x)x^{-\frac{5}{3}}$；

(7) $\dfrac{\sin x-1}{(x+\cos x)^2}$；

(8) $\dfrac{2(x\sin x+x^2\cos x-2)(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}(x\sin x-2\ln x)}{2x(\sqrt{x}+1)^2}$;

(9) $\dfrac{(3x^2-\csc^2 x)x\ln x-x^3-\cot x}{x\ln^2 x}$；

(10) $\dfrac{-2(x+\sin x\cos x)}{(x\sin x-\cos x)^2}$；

(11) $(e^x+\dfrac{1}{x\ln 3})\arcsin x+(e^x+\dfrac{\ln x}{\ln 3})\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(12) $-x^2\text{sh}x(\cot x\csc x+\dfrac{3}{x})+x(\csc x-3\ln x)(2\text{sh}x+x\text{ch}x)$；

(13) $\dfrac{(1+\tan x\sec x)(x-\csc x)-(x+\sec x)(1+\cot x\csc x)}{(x-\csc x)^2}$；

(14) $\dfrac{(1+x^2)(1+\cos x)\arctan x-(x+\sin x)}{(1+x^2)\arctan^2 x}$.

5．提示：设切点为(x_0,x_0)， $f(x)=\log_a x$，利用 $f(x_0)=x_0$ 与 $f'(x_0)=1$解出 x_0 与 a.

6．$\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n)=\dfrac{1}{e}$.

7．$S_1=\{(x,y)\,|\,a(ax^2+bx+c-y)>0\}$,

$S_2=\{(x,y)\,|\,ax^2+bx+c-y=0\}$,

$S_3=\{(x,y)\,|\,a(ax^2+bx+c-y)<0\}$.

第 4 节

1．(1) $2(2x^2-x+1)(4x-1)$；

(2) $e^{2x}(3\cos 3x+2\sin 3x)$；

(3) $-\dfrac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}$；

(4) $\dfrac{1-\ln x}{2x^2}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}$;

(5) $3x^2\cos x^3$;

(6) $-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$;

(7) $\dfrac{x-1-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})}$;

(8) $\dfrac{-2x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}}$;

(9) $\dfrac{2(x^4+1)}{x(x^4-1)}$;

(10) $\dfrac{-2(4x+\cos x)}{(2x^2+\sin x)^3}$;

(11) $\dfrac{2(1-x^2)\ln x-(1+\ln^2 x)(1-2x^2)}{x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

(12) $\dfrac{1+\csc x^2+x^2\csc x^2\cot x^2}{(1+\csc x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

(13) $-\dfrac{8}{3}x(2x^2-1)^{-\frac{4}{3}}-\dfrac{27}{4}x^2(3x^3+1)^{-\frac{5}{4}}$;

(14) $-\sin 2x\cdot e^{-\sin^2 x}$;

(15) $\dfrac{2x^4-3a^2x^2+a^4+a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2．(1) $\cot x$ ；(2) $\csc x$ ；(3) $\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2} & a>0\\ -\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} & a<0\end{cases}$ ；(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ；(5) $\sqrt{x^2-a^2}$.

3．(1) $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}f'(x^{\frac{2}{3}})$ ；(2) $-\dfrac{1}{x\ln^2 x}f'(\dfrac{1}{\ln x})$ ；(3) $\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ ；(4) $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ ；

(5) $2xe^{x^2}f'(e^{x^2})f'(f(e^{x^2}))$ ；(6) $\cos(f(\sin x))f'(\sin x)\cos x$ ；

(7) $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}f'\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$；(8) $-\dfrac{f'(f(x))f'(x)}{\left(f(f(x))\right)^2}$.

4．(1) $(1+\ln x)x^x$；

(2) $(x^3+\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{3x^2+\cos x}{x(x^3+\sin x)}-\dfrac{\ln(x^3+\sin x)}{x^2}\right]$；

(3) $\left(\ln\cos x - x\tan x\right)\cos^x x$；

(4) $\left[\ln\ln(2x+1)+\dfrac{2x}{(2x+1)\ln(2x+1)}\right]\ln^x(2x+1)$；

(5) $\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1-x^2}-\dfrac{3x^2}{2(1+x^3)}\right]$；

(6) $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x-x_i}$；

(7) $\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}x^{\sqrt{x}}\cos x^{\sqrt{x}}$.

5．(1) $\dfrac{1+y^2}{y^2}$；(2) $-\dfrac{e^y}{1+xe^y}$；(3) $\dfrac{1+2(\sin y-x)}{2(\sin y-x)\cos y-\sin y}$；(4) $\dfrac{y^2+y}{1-x-xy}$；

(5) $-\dfrac{2xe^{x^2+y}-y^2}{e^{x^2+y}-2xy}$；(6) $\dfrac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}$；(7) $-\dfrac{2y^2\cos x+y\ln y}{x+2y\sin x}$；

(8) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

8．(1) $\dfrac{3bt}{2a}$；(2) $\dfrac{3t^2-1}{2t}$；(3) $\dfrac{-t\sin t+2\cos t}{t\cos t+2\sin t}$；(4) $-\dfrac{b}{a}e^{2t}$；(5) $-\tan t$；

(6) $\dfrac{b\mathrm{sh}bt}{a\mathrm{ch}at}$；(7) -1；(8) $-\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$；(9) $\dfrac{(\sin t-\cos t)\tan t}{\sin t+\cos t}$；(10) $\dfrac{t}{2}$.

13．(1) $[f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)+f(u)g(u)h'(u)]\varphi'(x)dx$；

(2) $\dfrac{f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)-f(u)g(u)h'(u)}{(h(u))^2}\varphi'(x)dx$；

(3) $h(u)^{g(u)}\left[g(u)\dfrac{h'(u)}{h(u)}+g'(u)\ln h(u)\right]\varphi'(x)dx$；

（4） $\dfrac{h(u)g'(u)\ln h(u)-h'(u)g(u)\ln g(u)}{h(u)g(u)\ln^2 h(u)}\varphi'(x)dx$ ；

（5） $\dfrac{f'(u)h(u)-f(u)h'(u)}{f^2(u)+h^2(u)}\varphi'(x)dx$ ；

（6） $-\dfrac{f(u)f'(u)+h(u)h'(u)}{(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}\varphi'(x)dx$.

第 5 节

1．（1） $y'''=6$ ；

（2） $y''=7x^2+12x^2\ln x$ ；

（3） $y''=\dfrac{3x^2+8x+8}{4(1+x)^{\frac{5}{2}}}$ ；

（4） $y''=\dfrac{6\ln x-5}{x^4}$ ；

（5） $y''=6x\cos x^3-9x^4\sin x^3$ ；

$y'''=-54x^3\sin x^3-(27x^6-6)\cos x^3$ ；

（6） $y''=(6x-\dfrac{1}{4}x^2)\cos\sqrt{x}-\dfrac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}$ ；

$y'''=(6-\dfrac{15}{8}x)\cos\sqrt{x}+(\dfrac{1}{8}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{57}{8}x^{\frac{1}{2}})\sin\sqrt{x}$ ；

（7） $y'''=(27x^2+54x+18)e^{3x}$ ；

（8） $y''=\left[2(2x^2-1)\arcsin x+\dfrac{x(4x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2}$ ；

（9） $y^{(80)}=2^{80}\left[x(x^2-4740)\cos 2x+(120x^2-61620)\sin 2x\right]$ ；

（10） $y^{(99)}=(2x^2+19405)\text{ch}x+396x\text{sh}x$.

2．（1） $y^{(n)}=2^{n-1}\omega^n\sin(2\omega x+\dfrac{n-1}{2}\pi)$ ；

(2) $y^{(n)}=2^x\left[\ln^n 2\cdot\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\ln^{n-k}2\cdot\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\right]$；

(3) $y^{(n)}=e^x\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$；

(4) $y^{(n)}=(-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-2)^{n-k+1}(x-3)^{k+1}}$；

(5) $y^{(n)}=e^{\alpha x}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\alpha^{n-k}\beta^k\cos(\beta x+\frac{k\pi}{2})$；

(6) $y=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4x}{4}$，$y^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})\quad(n\geq 1)$.

4．(1) $[f(x^2)]'''=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)$；

(2) $[f(\frac{1}{x})]'''=-\frac{f'''\left(\frac{1}{x}\right)+6xf''\left(\frac{1}{x}\right)+6x^2f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^6}$；

(3) $[f(\ln x)]''=\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}$；

(4) $[\ln f(x)]''=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$；

(5) $[f(e^{-x})]'''=-e^{-3x}f'''(e^{-x})-3e^{-2x}f''(e^{-x})-e^{-x}f'(e^{-x})$；

(6) $[f(\arctan x)]''=\frac{f''(\arctan x)-2xf'(\arctan x)}{(1+x^2)^2}$.

5．(1) 提示：由 $y'(1+x^2)=1$，两边求 n 阶导数，$\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+1)}(1+x^2)^{(k)}=0$，以 $x=0$ 代入，得到递推公式 $y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0)$，从而得到

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\text{为奇数}\\ 0 & n\text{为偶数}\end{cases}；$$

(2) 提示：利用 $xy'=(1-x^2)y''$，类似 (1) 得到

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}[(n-2)!!]^2 & n\text{为奇数}\\ 0 & n\text{为偶数}\end{cases}.$$

6．(1) $y''=\dfrac{4xy'+2y-e^{x^2+y}[2+4x^2+4xy'+(y')^2]}{e^{x^2+y}-x^2}$，其中 $y'=\dfrac{2x(y-e^{x^2+y})}{e^{x^2+y}-x^2}$ ；

(2) $y''=\dfrac{2\sec(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2-2y'}{x-\sec^2(x+y)}$，其中 $y'=\dfrac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}$ ；

(3) $y''=\dfrac{2y^3\sin x-4y^2y'\cos x-2yy'+x(y')^2}{xy+2y^2\sin x}$，其中 $y'=-\dfrac{2y^2\cos x+y\ln y}{x+2y\sin x}$ ；

(4) $y''=\dfrac{2x+2y(y')^2-2ay'}{ax-y^2}$，其中 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

7．(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3b}{4a^2t}$ ；

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{t^2+2}{a(t\sin t-\cos t)^3}$ ；

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2+t^2-2\sin t-t\cos t}{(1-\sin t-t\cos t)^3}$ ；

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2b}{a^2}e^{3t}$ ；

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$ ；

(6) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{b(a\sin at\sin bt+b\cos at\cos bt)}{a^2\cos^3 at}$.

9．(1) $d^2y=\dfrac{2(1-\sec^2x)^2+6\sec^2x\tan x(x-\tan x)}{9(\tan x-x)^{\frac{5}{3}}}dx^2$ ；

(2) $d^4y=(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)e^{-x}dx^4$ ；

(3) $d^2y=\dfrac{3x^2+2}{x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx^2$ ；

(4) $d^2y=\dfrac{\sec x[(x^2-1)^2(1+2\tan^2 x)-2x(x^2-1)\tan x+2x^2+1]}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}dx^2$;

(5) $d^3y=-27(\sin 3x+x\cos 3x)dx^3$;

(6) $d^2y=x^x[(1+\ln x)^2+\dfrac{1}{x}]dx^2$;

(7) $d^ny=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right]dx^n$;

(8) $d^ny=(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\dfrac{2^k x^k\cos(2x+\frac{k\pi}{2})}{(k!)^2(n-k)!}dx^n$.

11. (1) $[f''(u)\sec^4 x+2f'(u)\sec^2 x\tan x]dx^2$;

(2) $\dfrac{g''(u)\ln^{\frac{1}{2}} x-g'(u)(1+2\ln x)}{4x^2\ln^{\frac{3}{2}} x}dx^2$;

(3) $[f'(u)g(u)+f(u)g'(u)]d^2u+[f''(u)g(u)+2f'(u)g'(u)+f(u)g''(u)]du^2$;

(4) $\dfrac{g'(u)}{g(u)}d^2u+\dfrac{g''(u)g(u)-(g'(u))^2}{g^2(u)}du^2$;

(5) $\dfrac{f'(u)g(u)-f(u)g'(u)}{g^2(u)}d^2u+$

$$\dfrac{f''(u)g^2(u)-f(u)g(u)g''(u)-2f'(u)g'(u)g(u)+2f(u)(g'(u))^2}{g^3(u)}du^2 .$$