第八章

第 1 节

1. $\dfrac{kq}{x}$.

3．（1）$\dfrac{5}{29}$.　（2）$\dfrac{3}{13}$.　（3）$\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.　（4）$\dfrac{\pi}{2ab(a+b)}$.

（5）$a \geq 0$时积分发散；$a < 0$时积分收敛于$-\dfrac{1}{2a}$.

（6）$p \leq 1$时积分发散；$p > 1$时积分收敛于$\dfrac{1}{p-1}(\ln 2)^{-p+1}$.

（7）2.　（8）$\dfrac{1}{4}$.　（9）$\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$；提示: 参考第六章第 3 节习题 1(10).

（10）0；提示:$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx$，再对右端任一积分作变量代换$x = \dfrac{1}{t}$.

4.　（1）1.　（2）$\dfrac{\pi}{2}$.　（3）$\dfrac{8}{3}$.　（4）$\dfrac{\pi}{2}$.　（5）积分发散.

（6）$\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$；提示: 作变量代换$\sqrt{\tan x} = t$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k}{n} = \int_0^1 \ln x dx = -1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$.

6. (1) $-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$；提示: 令$x = \dfrac{\pi}{2} - t$，再利用例 8.1.11.

(2) $-\dfrac{\pi^2}{2}\ln 2$；提示: 令 $x = \pi - t$，由$\int_0^{\pi} x\ln\sin x dx = \int_0^{\pi}\pi\ln\sin t dt - \int_0^{\pi} t\ln\sin t dt$，

得到 $\int_0^{\pi} x\ln\sin x dx = \dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$.

(3) $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$；提示: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\ln\sin x$，再用分部积分法.

(4) $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$；提示: 令$t = \arcsin x$，$\int_0^1\dfrac{\arcsin x}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cot t dt$.

(5) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$；提示: $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \ln x d\arcsin x$,再用分部积分法.

7． (1) π. (2) $\ln 2$. (3) 0.

10. 提示：积分$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x - \ln a}{x}dx$

$$=\int_0^a f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx+\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}dx，$$

对上面两积分中任意一个作变量代换 $x=\frac{a^2}{t}$.

12. 提示: 由$\int_a^{+\infty} f'(x)dx$的收敛性, 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在, 再利用第 11 题.

第 2 节

3．(1) 收敛；(2) 收敛；(3) 发散；(提示：$\frac{1}{1+x|\sin x|}\ge\frac{1}{1+x}$)

(4) 当 $p-q>1$时积分收敛，其余情况下积分发散.

5．(1) 条件收敛；(2) 当$0<p\le 1$时积分条件收敛，当 $p>1$时积分绝对收敛；

(3) 当$0<p\le 1$时积分条件收敛，当 $p>1$时积分绝对收敛；

(4) 条件收敛；(提示：令$t=x^2$，积分化为$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$)

(5) 当$n=m+1$时积分条件收敛，当$n>m+1$时积分绝对收敛，当$n<m+1$时积分发散.

7．(1) 收敛；(2) 收敛；(3) 发散；(4) 当 $p<3$时收敛，当 $p\ge 3$时发散；

(5) 当 $p>-1$时收敛，当 $p\le -1$时发散；

(6) 当 $p>0, q>0$时收敛，其余情况下发散；

(7) 当 $p>0, q>-1$时收敛，其余情况下发散.

8．(1) 收敛；(2) 收敛；(3) 当$1<p<2$时收敛，其余情况下发散；

(4) 当$1<p<2$时收敛，其余情况下发散；

（5）当 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛，当 $p\ge\frac{3}{2}$ 时发散；（提示：当 $x\to\frac{\pi}{2}-$ 时， $\tan x\sim\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$ ）

（6）当 $p>0$ 时收敛，当 $p\le 0$ 时发散；

（7）当 $\min(p,q)<1$，且 $\max(p,q)>1$ 时收敛，其余情况下发散；

（8）当 $p>1$ 或 $p=1, q>1$ 时收敛，其余情况下发散.

9．（1）当 $0<p<2$ 时收敛，其余情况下发散；

（2）当 $q<p-1$ 时积分绝对收敛，当 $p-1\le q<p$ 时积分条件收敛，当 $q\ge p$ 时积分发散；

（3）当 $0<p<1$ 时积分条件收敛，其余情况下积分发散；提示：注意

$\left|\int_0^A e^{\sin x}\cos x dx\right|\le e-1$，当 $0<p<1$ 时，利用 Dirichlet 判别法；

（4）当 $1<p<2$ 时积分绝对收敛，当 $0<p\le 1$ 时积分条件收敛，其余情况下积分发散；提示：注意 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{\sin x}\sin 2x dx=0$，由此可知 $\left|\int_0^A e^{\sin x}\sin 2x dx\right|$ 有界；

（5）当 $p<1$ 时积分绝对收敛，当 $1\le p<3$ 时积分条件收敛，当 $p\ge 3$ 时积分发散；提示：令 $t=\frac{1}{x^2}$， $\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}t^{\frac{p-3}{2}}\cos t dt$ ；

（6）当 $p>1$ 时积分绝对收敛，当 $0<p\le 1$ 时积分条件收敛；提示：注意

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\cos x+\cos\frac{1}{x}\sin x}{x^p}dx$，当 $p>0$ 且 x 充分大时， $\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}$ 与 $\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}$ 都是单调减少的.

10．提示：利用 Cauchy 收敛原理，对任意 $A''>A'>A$，由分部积分法，

$$\int_{A'}^{A''}x\sin x^4\sin x dx=-\int_{A'}^{A''}\frac{\sin x}{4x^2}d(\cos x^4)$$

$$=\left(-\frac{\sin x\cos x^4}{4x^2}\right)\Bigg|_{A'}^{A''}+\int_{A'}^{A''}\frac{\cos x^4\cos x}{4x^2}dx-\int_{A'}^{A''}\frac{\cos x^4\sin x}{2x^3}dx,$$

显然，当 $A\to+\infty$ 时，上式趋于零.

12．提示：利用 Cauchy 收敛原理，当 $x\to 0+$ 时，$0\le \frac{x}{2}f(x)\le\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)dt\to 0$.

13．提示：首先容易知道 $f(x)\ge 0$ ；然后利用 Cauchy 收敛原理，当 $x\to+\infty$ 时，

有 $0\le\frac{1}{2}x(\ln x)f(x)\le\int_{\sqrt{x}}^{x}tf(t)\cdot\frac{1}{t}dt=\int_{\sqrt{x}}^{x}f(t)dt\to 0$.

14．提示：利用分部积分法，

$$\int_0^{+\infty}f'(x)\sin^2 xdx=\int_0^{+\infty}\sin^2 xdf(x)=-\int_0^{+\infty}f(x)\sin 2xdx.$$

16．提示：$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}$.