习　　题　11.1

1. 证明定理 11.1.1： 距离满足正定性、对称性和三角不等式。
2. 证明：若$\mathbf{R}^n$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛，则其极限是唯一的。
3. 设$\mathbf{R}^n$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$和$\{\boldsymbol{y}_k\}$收敛，证明：对于任何实数α,β，成立等式
$$\lim_{k\to\infty}(\alpha\boldsymbol{x}_k+\beta\boldsymbol{y}_k) = \alpha\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k+\beta\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k。$$
4. 求下列$\mathbf{R}^2$中子集的内部、边界与闭包：
   (1) $\mathbf{S}=\{(x,y)\,|\,x>0, y\neq 0\}$；
   (2) $\mathbf{S}=\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2\leq 1\}$；
   (3) $\mathbf{S}=\left\{(x,y)\,|\,0<x\leq 1,\ y=\sin\frac{1}{x}\right\}$。
5. 求下列点集的全部聚点：
   (1) $\mathbf{S}=\left\{(-1)^k\frac{k}{k+1}\,\middle|\,k=1,2,\cdots\right\}$；
   (2) $\mathbf{S}=\left\{\left(\cos\frac{2k\pi}{5},\sin\frac{2k\pi}{5}\right)\,\middle|\,k=1,2,\cdots\right\}$；
   (3) $\mathbf{S}=\{(x,y)\,|\,(x^2+y^2)(y^2-x^2+1)\leq 0\}$。
6. 证明定理 11.1.3：$\boldsymbol{x}$是点集$\mathbf{S}$（$\subset\mathbf{R}^n$）的聚点的充分必要条件是：存在$\mathbf{S}$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足$\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{x}$（$k=1,2,\cdots$），且$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$。
7. 设$\mathbf{U}$是$\mathbf{R}^2$上的开集，是否$\mathbf{U}$的每个点都是它的聚点。对于$\mathbf{R}^2$中的闭集又如何呢？
8. 证明$\mathbf{S}\subset\mathbf{R}^n$的所有内点组成的点集$\mathbf{S}^\circ$必是开集。
9. 证明$\mathbf{S}\subset\mathbf{R}^n$的闭包$\overline{\mathbf{S}}=\mathbf{S}\cup\mathbf{S}'$必是闭集。
10. 设$\mathbf{E},\mathbf{F}\subset\mathbf{R}^n$。若$\mathbf{E}$为开集，$\mathbf{F}$为闭集，证明：$\mathbf{E}\setminus\mathbf{F}$为开集，$\mathbf{F}\setminus\mathbf{E}$为闭集。
11. 证明 **Cantor** 闭区域套定理。
12. 举例说明：满足$\lim\limits_{k\to\infty}|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k|=0$的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$不一定收敛。
13. 设$\mathbf{E},\mathbf{F}\subset\mathbf{R}^n$为紧集，证明$\mathbf{E}\cap\mathbf{F}$和$\mathbf{E}\cup\mathbf{F}$为紧集。
14. 用定义证明点集 $\{0\}\cup\left\{\frac{1}{k}\,\middle|\,k=1,2,\cdots\right\}$是$\mathbf{R}$中的紧集。
15. 应用 Heine-Borel 定理直接证明：$\mathbf{R}^n$上有界无限点集必有聚点。

习　　题　11.2

1．确定下列函数的自然定义域：

(1) $u=\ln(y-x)+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；　　(2) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$；

(3) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}\quad(R>r)$；

(4) $u=\arcsin\dfrac{z}{x^2+y^2}$。

2．设 $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ 　$(x>0)$，求 $f(x)$。

3．若函数

$$z(x,y)=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1),$$

且当 $y=4$ 时 $z=x+1$，求 $f(x)$ 和 $z(x,y)$。

4．讨论下列函数当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时的极限是否存在：

(1) $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$；　(2) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$；

(3) $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,\\ 0 & \text{其它点};\end{cases}$　(4) $f(x,y)=\frac{x^3y^3}{x^4+y^8}$。

5．对多元函数证明极限唯一性，局部有界性，局部保序性和局部夹逼性。

6．对多元函数证明极限的四则运算法则：假设当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时函数 $f(\boldsymbol{x})$ 和 $g(\boldsymbol{x})$ 的极限存在，则

(1) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}(f(\boldsymbol{x})\pm g(\boldsymbol{x}))=\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})\pm\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}g(\boldsymbol{x})$；

(2) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}(f(\boldsymbol{x})\cdot g(\boldsymbol{x}))=\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})\cdot\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}g(\boldsymbol{x})$；

(3) $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}(f(\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{x}))=\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})/\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}g(\boldsymbol{x})$　（$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}g(\boldsymbol{x})\neq 0$）。

7．求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$；　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}$；　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$；

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$；　(8) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$。

8．讨论下列函数在原点的二重极限和二次极限：

(1) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；

(2) $f(x,y)=\frac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2}$；

(3) $f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}$。

9．验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{x^2}\left(y-\frac{1}{2}x^2\right), & x>0 \text{ 且 } \frac{1}{2}x^2<y\le x^2,\\ \frac{1}{x^2}(2x^2-y), & x>0 \text{ 且 } x^2<y<2x^2,\\ 0, & \text{其它点}\end{cases}$$

在原点不连续，而在其它点连续。

10．讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的连续范围。

11．设 $f(t)$ 在区间 (a,b) 上具有连续导数，$\mathbf{D}=(a,b)\times(a,b)$。定义 $\mathbf{D}$ 上的函数

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y,\\ f'(x), & x=y.\end{cases}$$

证明：对于任何 $c\in(a,b)$ 成立

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=f'(c)。$$

12．设二元函数 $f(x,y)$ 在开集 $\mathbf{D}\subset\mathbf{R}^2$ 内对于变量 x 是连续的，对于变量 y 满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\le L|y'-y''|,$$

其中 $(x,y'),(x,y'')\in\mathbf{D}$，$L$ 为常数（通常称为 Lipschitz 常数）。证明 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 内连续。

13．证明：若 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 是 $\mathbf{D}$ 上的连续映射，则映射 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 与函数 $\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$ 在 $\mathbf{D}$ 上都是连续的。

14．证明复合映射的连续性定理（定理 11.2.2）。

习　　题　11.3

1．设 $\mathbf{D}\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}:\mathbf{D}\to\mathbf{R}^m$ 为连续映射。如果 $\mathbf{D}$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{D}$，证明

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})。$$

2．设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，c 为实数。设

$$\boldsymbol{A}_c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})<c\}，\mathbf{B}_c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\le c\}。$$

证明 $\boldsymbol{A}_c$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的开集，$\boldsymbol{B}_c$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的闭集。

3．设二元函数

$$f(x,y)=\frac{1}{1-xy},\quad (x,y)\in\mathbf{D}=[0,1)\times[0,1),$$

证明：f 在 $\mathbf{D}$ 上连续，但不一致连续。

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的非空子集，定义 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 f 为

$$f(\boldsymbol{x})=\inf\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\mid \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{A}\}。$$

它称为 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{A}$ 的距离。证明：

(1) 当且仅当 $\boldsymbol{x}\in\overline{\boldsymbol{A}}$ 时，$f(\boldsymbol{x})=0$；

(2) 对于任意 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in\mathbf{R}^n$，不等式

$$|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|\le|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|$$

成立，从而 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是紧集，则对于任意 $c>0$，点集 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\le c\}$ 是紧集。

5．设二元函数 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续。证明：

（1） 若 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=+\infty$，则 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值必定存在；

（2） 若 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)=0$，则 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最大值与最小值至少存在一个。

6．设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，满足

(1) 当 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 时成立 $f(\boldsymbol{x})>0$ ；

(2) 对于任意 $\boldsymbol{x}$ 与 $c>0$，成立 $f(c\boldsymbol{x})=cf(\boldsymbol{x})$。

证明：存在 $a>0, b>0$，使得

$$a|\boldsymbol{x}|\leq f(\boldsymbol{x})\leq b|\boldsymbol{x}|。$$

7．设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为连续映射。证明对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意子集 $\boldsymbol{A}$，成立

$$\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{A}})\subset\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}。$$

举例说明 $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{A}})$ 能够是 $\overline{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})}$ 的真子集。

8．设 f 是有界开区域 $\mathbf{D}\subset\mathbf{R}^2$ 上的一致连续函数。证明：

（1）可以将 f 连续延拓到 $\mathbf{D}$ 的边界上，即存在定义在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上的连续函数 $\tilde{f}$，使得 $\tilde{f}\big|_{\mathbf{D}}=f$ ；

（2） f 在 $\mathbf{D}$ 上有界。