# 第十章

## 第 1 节

1．(1) (i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.
　(2) 一致收敛.
　(3) (i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.
　(4) (i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.
　(5) 一致收敛.
　(6) 非一致收敛.
　(7) (i) 一致收敛. (ii) 非一致收敛.
　(8) (i) 非一致收敛. (ii) 非一致收敛.
　(9) 非一致收敛.
　(10) (i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.
　(11) (i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.
　(12) (i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.

4. 不成立; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{'}(1)=\dfrac{1}{2}\neq S'(1)$.

5. (1) $\alpha<1$. (2) $\alpha<2$. (3) $\alpha<0$.

6. 提示: $\forall\eta>0$，证明$\{S_n(x)\}$在$[a+\eta,b-\eta]$上一致收敛于$S'(x)$. 取$0<\alpha<\eta$，

则$S'(x)$在$[a+\alpha,b-\alpha]$上一致连续，即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in[a+\alpha,b-\alpha]$，

只要$|x'-x''|<\delta$，就成立$|S'(x')=S'(x'')|<\varepsilon$. 取$N=\max\left\{\left[\dfrac{1}{\delta}\right],\left[\dfrac{1}{\eta-\alpha}\right]\right\}$，

当$n>N$且$x\in[a+\eta,b-\eta]$时，$x+\dfrac{1}{n}\in[a+\alpha,b-\alpha]$，于是$|S_n(x)-S'(x)|=$

$|S'(\xi)-S'(x)|<\varepsilon$.

7. 提示: 设$|S_0(x)|\le M$，则$|S_n(x)|\le M\dfrac{x^n}{n!}$.

8. 提示：设$|S(x)|\le M$. 由$S(1)=0$，得到$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x\in[1-\delta,1]$时，$|x^nS(x)|<\varepsilon$；再由$\{x^n\}$在$[0,1-\delta]$的一致收敛性，$\exists N$，当$n>N$时，对一切$x\in[0,1-\delta]$成立$|x^n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

## 第 2 节

1．(1) 非一致收敛.
　(2) 一致收敛.
　(3) 一致收敛.

（4）(i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.
（5）一致收敛.
（6）一致收敛.
（7）一致收敛.
（8）一致收敛.
（9）(i) 非一致收敛.(ii) 一致收敛.
（10）一致收敛.
（11）非一致收敛.
（12）一致收敛.

2. 提示：证明 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 与 $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛.

3. 提示：证明 $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 与 $(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{k+1}e^{-nx}$ $(k=1,2,\cdots)$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛.

4. 提示：证明 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-x}$ 与 $(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{-x}\ln^k n$ $(k=1,2,\cdots)$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛;

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}$ 与 $(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}\ln^k n$ $(k=1,2,\cdots)$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛.

5. 提示：证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\arctan\frac{x}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

6. 提示: (1) 利用 Abel 判别法证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,\delta)$ 上一致收敛.

(2) 利用 Abel 判别法证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

7. 提示：先利用 Dini 定理证明 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在 $(a,b)$ 内闭一致收敛，再利用 Cauchy 收敛原理证明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(a,b)$ 内闭一致收敛.

8. 提示：不等式 $\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|\le\max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(a)\right|,\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(b)\right|\right\}$ 对一切 $x\in[a,b]$ 成立，然后利用 Cauchy 收敛原理.

9. 提示：反证法．设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 上一致收敛，则 $\forall\varepsilon>0,\exists N$，对一切

$m>n>N$ 与一切 $x\in(a,a+\delta)$，成立 $\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，再令 $x\to a+$，得到

$\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(a)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，这说明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x=a$ 收敛.

10. 提示: $\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\le\frac{a}{n\ln^2 n}$.

11．(2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\ln\frac{3}{2}$. 提示：$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2^n}dx$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$，再利用 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$.

12. (2) 提示: $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+n}}\sin\frac{n\pi}{2}$，这是一个 Leibniz 级数，它的前两项为

$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3\sqrt{30}}$.

13. 提示: (1) $|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_2}\right|\le|x_1-x_2|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$.

(2) $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^A\frac{dx}{2^n+x}=\lim_{A\to+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{A}{2^n}\right)=+\infty$.

## 第 3 节

1．(1) $R=\frac{1}{3}$，$D=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.　(2) $R=1$，$D=(0,2)$.

(3) $R=\sqrt{2}$，$D=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$. (4) $R=1$，$D=(-2,0]$.

(5) $R=+\infty$，$D=(-\infty,+\infty)$.　(6) $R=1$，$D=[-1,1]$.

(7) $R=e$，$D=(-e,e)$. 提示: 应用 Stirling 公式.

(8) $R=4$，$D=(-4,4)$. 提示: 应用 Stirling 公式.

(9) $R=1$，$D=[-1,1)$. 提示：当 $x=1$ 时应用 Raabe 判别法.

2. （1） $D=\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$.（2） $D=(-a,a)$.（3） $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

3. （1） $R=R_1$.（2） $R\geq\min(R_1,R_2)$.（3） $R\geq R_1R_2$.

4. （1） $S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$， $D=(-1,1)$.

（2） $S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$， $D=(-1,1)$.

（3） $S(x)=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$， $D=(-1,1)$.

（4） $S(x)=1-(1-\frac{1}{x})\ln(1-x)$， $D=[-1,1]$.

（5） $S(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}$， $D=(-1,1)$.

（6） $S(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$， $D=(-\infty,+\infty)$.

（7） $S(x)=(1+x)e^x-1$， $D=(-\infty,+\infty)$.

5. 提示：当 $x\in[0,r)$， $\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ . 令 $x\to r-$，由 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛，

可知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $[0,r]$ 连续，于是 $\int_0^r f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ .

$$\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\cdot\frac{dx}{x}=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

7. （1） $\frac{2}{9}$；提示： $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n=\frac{1}{(1+x)^2}$，取 $x=\frac{1}{2}$.

（2） $\ln 2$；提示： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=\ln\frac{1}{1-x}$，取 $x=\frac{1}{2}$.

（3） $\frac{11}{27}$；提示： $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n+1}=\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$，取 $x=\frac{1}{4}$.

（4） $12$；提示： $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n=\frac{1+x}{(1-x)^3}$，取 $x=\frac{1}{2}$.

（5） $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$；提示：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}=\frac{\arctan x}{x}$，取 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

（6） $\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}$；提示：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^n=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\ln(1+x)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$，取 $x=\frac{1}{2}$

（7） $\frac{2}{e^2}$；提示：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}=xe^{-x}$，取 $x=2$.

（8） $2e-1$；提示：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

8. 提示：设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R_1$，$\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n$ 的收敛半径为 $R_2$. 由 $0\le a_n\le A_n$，

可知 $R_1\ge R_2$；由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,可知 $R_1\le 1$；又由 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}-a_{n+1}}{A_{n+1}}=1$，

可知 $R_2=1$. 结合上述关系，得到 $R_1=1$.

9. (2) 不存在；提示：令 $t=2x$，当 $t\in(0,1)$，$-\frac{\ln(1-t)}{t}$ 单调增加，于是有

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to 1-}\frac{2}{t-1}\left[\int_0^t-\frac{\ln(1-u)}{u}du-\int_0^1-\frac{\ln(1-u)}{u}du\right]$$

$$=\lim_{t\to 1-}\frac{2}{1-t}\int_t^1-\frac{\ln(1-u)}{u}du>\lim_{t\to 1-}-\frac{2\ln(1-t)}{t}=+\infty.$$

## 第 4 节

1．（1） $5+11(x-1)+12(x-1)^2+5(x-1)^3$，$D=(-\infty,+\infty)$.

（2） $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$，$D=(-2,0)$.

（3） $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right]x^n$，$D=(-1,1)$.

（4） $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，$D=(-\infty,+\infty)$.

(5) $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^{n}}(x-2)^{n}$，$D=(0,4]$.

(6) $\sqrt[3]{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^{2n}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ n\end{pmatrix}x^{2n}$，$D=[-2,2]$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n}}(x-1)^{n}$，$D=(-1,3)$.

(8) $-x-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)x^{n}$，$D=[-1,1)$

(9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，$D=(-1,1)$.

(10) $1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n}}{n!}\right)x^{n}$，$D=(-1,1)$.

2. (1) $1+\frac{1}{6}x^{2}+\frac{7}{360}x^{4}+\cdots$.

(2) $1+x+\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{8}x^{4}+\cdots$.

(3) $-\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{12}x^{4}-\frac{7}{240}x^{6}-\cdots$.

(4) $1+x+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{2}x^{3}+\frac{3}{8}x^{4}+\cdots$.

4. 提示: $\frac{e^{x}-1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n+1)!}$，逐项求导后，以$x=1$代入.

5. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}=\frac{2(x^{2}+4)}{(x+2)^{2}}\ln\frac{2(x^{2}+4)}{(x-2)^{2}}-1$，$D=(-\infty,0]$.

提示: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^{n}=(1+\frac{1}{t})\ln(1+t)-1$，以$t=\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2}$代入.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{n}=\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}$，$D=(-1,1)$.

提示: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^{n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n}\right)$.

6. 提示: 设$a_{n}=c+(n-1)d$，$n=1,2,\cdots$. 由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^{n}}=\frac{1}{b-1}$与$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^{n}}=\frac{1}{(b-1)^{2}}$，得

到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}=c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}+d\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}=\frac{bc-c+d}{(b-1)^2}$.

7. 提示: $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x dx=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

## 第 5 节

4. 提示: 利用定理 10.5.1.

5. 提示: 先应用数学归纳法证明$P_n(x)\le|x|$，再证明$P_{n+1}(x)\ge P_n(x)$，于是得到函数序列$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上收敛; 求出极限函数为$|x|$，由 Dini 定理可知$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上是一致收敛于$|x|$的.