第十二章

第 1 节

1. (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4-24x^3y^2$， $\frac{\partial z}{\partial y}=6y^5-12x^4y$ ；

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^3}{x^2+y^2}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ ；

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$ ；

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$， $\frac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$ ；

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=e^x(\cos y+x\sin y+\sin y)$， $\frac{\partial z}{\partial y}=e^x(x\cos y-\sin y)$ ；

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y}\sec^2\left(\frac{x^2}{y}\right)$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}\sec^2\left(\frac{x^2}{y}\right)$ ；

(7) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$ ；

(8) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$ ；

(9) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y(x+\ln y)}$ ；

(10) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+x^2}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}$ ；

(11) $\frac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)\,e^{x(x^2+y^2+z^2)}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=2xy\,e^{x(x^2+y^2+z^2)}$，

$\frac{\partial u}{\partial z}=2xz\,e^{x(x^2+y^2+z^2)}$ ；

(12) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\ln x}{z}x^{\frac{y}{z}}$， $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y\ln x}{z^2}x^{\frac{y}{z}}$ ；

(13) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ ；

(14) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$， $\frac{\partial u}{\partial z}=y^z x^{y^z}\ln x\ln y$ ；

(15) $\frac{\partial u}{\partial x_i}=a_i,\quad i=1,2,\cdots,n$ ；

(16) $\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j,\quad i=1,2,\cdots,n$， $\frac{\partial u}{\partial y_j}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i,\quad j=1,2,\cdots,n$.

2． $f_x(3,4)=\frac{2}{5}$， $f_y(3,4)=\frac{1}{5}$.

4. $\theta=\frac{\pi}{4}$.

5. (1) $df(1,2)=8dx-dy$;

(2) $df(2,4)=\frac{4}{21}dx+\frac{8}{21}dy$;

(3) $df(0,1)=dx$, $df(\frac{\pi}{4},2)=\frac{\sqrt{2}}{8}dx-\frac{\sqrt{2}}{8}dy$.

6. (1) $dz=y^x\ln y dx+xy^{x-1}dy$;

(2) $dz=e^{xy}(1+xy)(ydx+xdy)$;

(3) $dz=-\frac{2y}{(x-y)^2}dx+\frac{2x}{(x-y)^2}dy$;

(4) $dz=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy$;

(5) $du=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

(6) $du=\frac{2(xdx+ydy+zdz)}{x^2+y^2+z^2}$.

7. $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{V}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

8. $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{v}}\Big|_{(1,1)}=\cos\alpha+\sin\alpha$,

(1) $\mathbf{v}=(\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4})$; (2) $\mathbf{v}=(\cos\frac{5\pi}{4},\sin\frac{5\pi}{4})$;

(3) $\mathbf{v}=(\cos\frac{3\pi}{4},\sin\frac{3\pi}{4})$ 或 $\mathbf{v}=(\cos\frac{7\pi}{4},\sin\frac{7\pi}{4})$.

9. (1) $\operatorname{grad} f(1,2)=(2,2)$, (2) $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\Big|_{(1,2)}=\frac{14}{5}$.

10. (1) $\operatorname{grad} z=(2x+y^3\cos(xy),\ 2y\sin(xy)+xy^2\cos(xy))$;

(2) $\operatorname{grad} z=(-\frac{2x}{a^2},-\frac{2y}{b^2})$;

(3) $\operatorname{grad} u(1,1,1)=(11,9,5)$.

11. 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 点，增长最快的方向为 $\operatorname{grad} f=(y,x)$；在 $(0,0)$ 点，增长最快的方向为 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$.

16. (1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(2-y)\cos(x+y)-x\sin(x+y)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1-y)\cos(x+y)-(1+x)\sin(x+y)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-y\cos(x+y)-(x+2)\sin(x+y)$.

(3) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=(2+4xy+x^2y^2)e^{xy}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=(3x^2+x^3y)e^{xy}$.

(4) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=-\frac{6a^4}{(ax+by+cz)^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}=-\frac{6a^2b^2}{(ax+by+cz)^4}$.

(5) $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\partial y^q}=p!q!$.

(6) $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}$.

17. (1) $d^2z=\frac{1}{x}dx^2+\frac{2}{y}dxdy-\frac{x}{y^2}dy^2$;

(2) $d^3z=-4\sin 2(ax+by)(adx+bdy)^3$;

(3) $d^3u=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2+6x+6)dx^3+(x^2+y^2+z^2+6y+6)dy^3$

$+(x^2+y^2+z^2+6z+6)dz^3]+3e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2+4x+2y+2)dx^2dy$

$+(x^2+y^2+z^2+4y+2z+2)dy^2dz+(x^2+y^2+z^2+4z+2x+2)dz^2dx$

$+(x^2+y^2+z^2+2x+4y+2)dxdy^2+(x^2+y^2+z^2+2y+4z+2)dydz^2$

$+(x^2+y^2+z^2+2z+4x+2)dzdx^2]+e^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z)dxdydz$.

(4) $d^kz=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}e^x\sin\left(y+\frac{k-i}{2}\pi\right)dx^idy^{k-i}$.

18. $f(x,y)=(2-x)\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-xy)+y^3$.

20. $\alpha=-\frac{3}{2}$.

21. (1) $\mathbf{f}'(\frac{\pi}{4})=(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b,c)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\mathbf{f}'(1,2,\frac{\pi}{4})=\begin{pmatrix}3 & e^2 & -2e^2\\ 3 & 12 & 16\end{pmatrix}$;

(3) $\mathbf{g}'(1,\pi)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

22. (2) $\begin{cases}f_1(x,y,z)=x+C_1\\ f_2(x,y,z)=y+C_2\\ f_3(x,y,z)=z+C_3\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}f_1(x,y,z)=\int p(x)dx\\ f_2(x,y,z)=\int q(y)dy\\ f_3(x,y,z)=\int r(z)dz\end{cases}$.

第 2 节

1. (1) $\frac{dz}{dt}=(2-\frac{4}{t^3})\sec(2t+\frac{2}{t^2})$;

(2) $\frac{d^2z}{dt^2}=e^{\sin t-2t^3}[(\cos t-6t^2)-\sin t-12t]$;

(3) $\frac{dw}{dx}=e^{ax}\sin x$;

(4) $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-2y)}\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}\end{cases}$;

(5) $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}(2x+2y^4\sin x\cos x)\\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}(2y+4y^3\sin^2 x)\end{cases}$;

(6) $\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial t}=e^s(\sin u+2xv\cos u)+e^t(\sin u+2yv\cos u)+e^{s+t}(\sin u+2zv\cos u)\\ \frac{\partial w}{\partial s}=te^s(\sin u+2xv\cos u)+e^{s+t}(\sin u+2zv\cos u)\end{cases}$

其中$u=x^2+y^2+z^2$， $v=x+y+z$;

(7) $\frac{\partial z}{\partial u}=2(u+v)-\sin(u+v+\arcsin v)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}=2-\cos(u+v+\arcsin v)(1+\frac{1}{\sqrt{1-v^2}})$;

(8) $\frac{\partial u}{\partial x}=yf_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)$,

$\frac{\partial u}{\partial y}=xf_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+xyf_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+x^2f_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{2x^2}{y^2}f_{12}\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^4}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right)$.

(9) $\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2+z^2)$, $\frac{\partial u}{\partial z}=2zf'(x^2+y^2+z^2)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+4x^2f''(x^2+y^2+z^2)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xyf''(x^2+y^2+z^2)$.

(10) $\frac{\partial w}{\partial u}=f_x+f_y+vf_z$, $\frac{\partial w}{\partial v}=f_x-f_y+uf_z$,

$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=f_{xx}+(u+v)f_{xz}-f_{yy}+(u-v)f_{yz}+f_z+uvf_{zz}$.

2. $f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}$.

3. $\varphi'(1)=17$.

4. $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{yf(x^2-y^2)}$.

7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\sqrt{u^2+v^2}(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2})$.

8. $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$.

9. (2) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$.

10. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+xyf_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^3}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right)$$
$$-\frac{1}{y^2}g'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}g''\left(\frac{x}{y}\right).$$

11. $$\begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 2r\cos 2\theta & -2r^2\sin 2\theta \\ r\sin 2\theta & r^2\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

12. $\frac{\partial w}{\partial x}=f_x+f_vh_x$, $\frac{\partial w}{\partial y}=f_ug_y+f_vh_y$, $\frac{\partial w}{\partial z}=f_ug_z$.

13. $dz=u^{v-1}\left[\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}v+\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}u\ln u\right]$.

14. $dz=\left[(2x+y)dx+(2y-x)dy\right]e^{-\arctan\frac{y}{x}}$ ； $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{y^2-xy-x^2}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{y}{x}}$.

15. (1) $du=2f'(ax^2+by^2+cz^2)(axdx+bydy+czdz)$,

(2) $du=(f_1+yf_2)dx+(f_1+xf_2)dy$,

(3) $du=\dfrac{2f_1}{1+x^2+y^2+z^2}(xdx+ydy+zdz)+e^{x+y+z}f_2(dx+dy+dz)$.

16. $d^k u=f^{(k)}(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)^k$.

17. 提示: 当 $r\neq 0$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial r}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\cos\theta\, f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\, f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{r}\left(xf_x(x,y)+yf_y(x,y)\right)=0,$$

所以 $f(r\cos\theta,r\sin\theta)=F(\theta)$. 再利用 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性，得到 $f(x,y)$ 为常数。

18．提示：设 $F(t)=f\left(x+t(y-x)\right)$，利用 $F(1)-F(0)=\int_0^1 F'(t)dt.$

第 3 节

2. $f(x,y)=-14-13(x-1)-6(y-2)+5(x-1)^2-12(x-1)(y-2)+4(y-2)^2$

$$+3(x-1)^3-2(x-1)^2(y-2)-2(x-1)(y-2)^2+(y-2)^3.$$

3. $f(x,y)=xy-\dfrac{1}{2}xy^2+\circ\left((\sqrt{x^2+y^2})^3\right).$

4. $f(x,y)=1+(x+y)+\dfrac{1}{2!}(x+y)^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}(x+y)^n+R_n$,

其中 $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}e^{\theta(x+y)}$..

5．（1） $f(x,y)=1-(x-1)+(x-1)^2-\dfrac{1}{2}y^2+R_2$，

$R_2=-\dfrac{\cos\eta}{\xi^4}(x-1)^3-\dfrac{\sin\eta}{\xi^3}(x-1)^2y+\dfrac{\cos\eta}{2\xi^2}(x-1)y^2+\dfrac{\sin\eta}{6\xi}y^3$，其中

$\xi=1+\theta(x-1)$， $\eta=\theta y$， $0<\theta<1$ ；

(2) $f(x,y)=1+\sum_{n=1}^{k}[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-1)^{n-j}(n-j)!\cos(\frac{j}{2}\pi)(x-1)^{n-j}y^j]+R_k$，

$$R_k=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k+1}C_{k+1}^j(-1)^{k+1-j}(k+1-j)!\frac{1}{\xi^{k-j+2}}\cos(\eta+\frac{j}{2}\pi)(x-1)^{k+1-j}y^j$$。

当 $x=1$ 时，$\xi=1$，对任意 $y\in(-\infty,+\infty)$，$R_k\to 0\ (k\to\infty)$ 显然成立；

当 $0<|x-1|<\frac{1}{3}$ 时，$\frac{2}{3}<\xi<\frac{4}{3}$，$\left|\frac{x-1}{\xi}\right|<\frac{1}{2}$，于是对任意 $y\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|R_k|\le\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!}(k+1-j)!\frac{1}{|\xi|^{k-j+2}}|x-1|^{k+1-j}|y|^j$$

$$=\frac{1}{|\xi|}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{j!}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1-j}|y|^j\le\frac{1}{|\xi|}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left|\frac{y\xi}{x-1}\right|^j=\frac{1}{|\xi|}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1}e^{\left|\frac{y\xi}{x-1}\right|},$$

因此也成立 $R_k\to 0$（$k\to\infty$）。

6. $8.96^{2.03}\approx 85.74$。

第 4 节

1. (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}$；(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$；(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$；

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{(x+y)^2}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2a^2}{(x+y)^5}[a^2+(x+y)^2]$；

(5) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$；

(6) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2z}{(e^z-xy)^2}-\frac{y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z}{e^z-xy}+\frac{2xyz}{(e^z-xy)^2}-\frac{xyz^2e^z}{(e^z-xy)^3}$$；

(7) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy^3 z}{(z^2 - xy)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z^5 - 2xyz^3 - x^2 y^2 z}{(z^2 - xy)^3};$$

(8) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_1 + f_3}{f_2 + f_3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_1 + f_2}{f_2 + f_3}$;

(9) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zf_1}{1 - xf_1 - f_2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_2}{1 - xf_1 - f_2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{1 - xf_1 - f_2}\left[2\frac{\partial z}{\partial x} f_1 + \left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 f_{11} + 2\frac{\partial z}{\partial x}\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) f_{12} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 f_{22}\right];$$

(10) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_1 + f_2 + f_3}{f_3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_2 + f_3}{f_3}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{f_3^3}\left[f_3^2(f_{11} + 2f_{12} + f_{22}) - 2f_3(f_1 + f_2)(f_{13} + f_{23}) + (f_1 + f_2)^2 f_{33}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{f_3^3}\left[f_3^2(f_{12} + f_{22}) - f_2 f_3 f_{13} + f_2(f_1 + f_2) f_{33} - f_3(f_1 + 2f_2) f_{23}\right].$$

5. (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+6z)}{y(2+6z)}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{x}{1+3z}$,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2y}\left[\frac{1}{1+3z} - \frac{x^2(1+6z)^2}{2y^2(1+3z)^2} - \frac{3x^2}{(1+3z)^3} - 2\right], \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{1+3z} - \frac{3x^2}{(1+3z)^3}.$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ux - vy}{y^2 - x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{vx - uy}{y^2 - x^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2u(x^2 + y^2) - 4xyv}{(y^2 - x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2v(x^2 + y^2) - 4xyu}{(y^2 - x^2)^2}.$$

(3) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f_2 g_1 + uf_1(2vyg_2 - 1)}{f_2 g_1 - (xf_1 - 1)(2vyg_2 - 1)}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(1 - xf_1)g_1 - uf_1 g_1}{f_2 g_1 - (xf_1 - 1)(2vyg_2 - 1)}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial x} = uv(u + v)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = uv(v - u)$.

(5) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(u\cos v - v\sin v)}{e^u}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(v\cos v + u\sin v)}{e^u}$.

6. (1) $dz=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}dx+\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}dy$;

(2) $du=\frac{\sin v+x\cos v}{x\cos v+y\cos u}dx+\frac{x\cos v-\sin u}{x\cos v+y\cos u}dy$,

$$dv=\frac{y\cos u-\sin v}{x\cos v+y\cos u}dx+\frac{y\cos u+\sin u}{x\cos v+y\cos u}dy.$$

7. $\frac{dx}{dy}=\frac{yF_1G_2+xy^2F_2G_1+(y-z)F_2G_2}{y(F_1G_2-y^2F_2G_1)}$;

$\frac{dz}{dy}=\frac{zF_1G_2-y^3F_2G_1-y^2(x+y)F_1G_1}{y(F_1G_2-y^2F_2G_1)}$.

8. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$.

9. 取$\lambda,,\mu$为方程$A+2Bt+Ct^2=0$的两个根.

10. $a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}+c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}-\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=0$

11. $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

12. (1) $\frac{\partial w}{\partial v}=0$; (2) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+(\frac{v}{u}-1)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$; (3) $2\frac{\partial w}{\partial v}+v\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

第 5 节

1. (1) 切线：$2(x-1)=y-1=4(2z-1)$，法平面：$8x+16y+2z=25$；

（2）切线：$x-\frac{\pi}{2}+1=y-1=\frac{\sqrt{2}}{2}z-2$，

法平面：$(x-\frac{\pi}{2}+1)+(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0$；

（3）切线：$\begin{cases}x+z=2\\y=-2\end{cases}$，法平面：$x=z$；

（4）切线：$x-\frac{R}{\sqrt{2}}=-y+\frac{R}{\sqrt{2}}=-z+\frac{R}{\sqrt{2}}$，法平面：$x-y-z+\frac{\sqrt{2}}{2}R=0$.

2．$(-1,1,-1)$ 或 $(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27})$.

3．$(0,-1,0)$.

4．（1）切平面：$64(x-2)+9(y-1)-(z-35)=0$,

法线：$\frac{x-2}{64}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-35}{-1}$;

（2）切平面：$x+y-2z\ln 2=0$，法线：$x-\ln 2=y-\ln 2=-\frac{1}{2\ln 2}(z-1)$;

（3）切平面：$-3y+2z+1=0$，法线：$\begin{cases} x=1 \\ 2y+3z=5 \end{cases}$.

5. 点:$(-3.-1,3)$，法线: $x+3=\frac{1}{3}(y+1)=z-3$.

6. $(x-6)+3(y-9)+5(z-10)=0$ 与 $(x+6)+3(y+9)+5(z+10)=0$.

7. $\theta=\arccos\left|\frac{2bz}{a\sqrt{a^2+b^2}}\right|$.

8. $4x-2y-3z-3=0$.

9. $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{11}{7}$.

11. $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

12. 曲面的法向量与向量 (b,c,a) 垂直.

13. 提示: 曲面上任意一点 (x,y,z) 处的切平面

$$\left(f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})\right)(X-x)+f'(\frac{y}{x})(Y-y)-(Z-z)=0$$

经过 $(0,0,0)$ 点.

14. 提示: 曲面上任意一点 (x,y,z) 处的切平面

$$\left(\frac{1}{z}F_2-\frac{y}{x^2}F_3\right)(X-x)+\left(\frac{1}{x}F_3-\frac{z}{y^2}F_1\right)(Y-y)+\left(\frac{1}{y}F_3-\frac{x}{z^2}F_2\right)(Z-z)=0$$

经过 $(0,0,0)$ 点.

15．提示：利用恒等式 $xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z)$ 证明曲面

上任意一点 (x,y,z) 处的切平面

$$F_x(x,y,z)(X-x)+F_y(x,y,z)(Y-y)+F_z(x,y,z)(Z-z)=0$$

经过 $(0,0,0)$ 点.

第 6 节

1. (1) 在 $(0,0)$ 点取极大值 $f_{\max}=6$ ；在 $(1,\sqrt{3})$ ，$(1,-\sqrt{3})$ ，$(-1,\sqrt{3})$ ，$(-1,-\sqrt{3})$ 四点取极小值 $f_{\min}=-13$ ；

（2）在 $(1,1)$ ，$(-1,-1)$ 两点取极小值 $f_{\min}=-2$ ；

（3）无极值；

（4）在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8})$ ，$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8})$ 两点取极小值 $f_{\min}=-\frac{1}{64}$ ；

（5）在 $(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a})$ 点取极小值 $f_{\min}=3ab$ ；

（6）在 $(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$ 取极小值 $f_{\min}=4\cdot 2^{\frac{1}{4}}$。

4．最大值 $f_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ；最小值 $f_{\min}=0$。

5．$\xi=x-\frac{1}{6}$。

6．面积最大者为内接正三角形，$S_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ 。

7．$\frac{R}{\sqrt{5}}=\frac{H}{1}=\frac{h}{2}$。

8. 提示: 由 $y'=-\frac{x+y}{x+2y}=0$，得到 $x+y=0$，再从 $x^2+2xy+2y^2=1$ 得到 $y^2=1$，因此 $y_{\max}=1$，$y_{\min}=-1$。

9.提示 :由 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{4x}{1-2z-8y}=0$ 与 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4(y+2z)}{1-2z-8y}=0$，得到 $x=0$ 与 $y+2z=0$，再

从 $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$ 得到 $7z^2+z-8=0$，因此 $z_{\max}=1$， $z_{\min}=-\frac{8}{7}$。

10． $(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$。

11．提示：设圆半径为 r，外切三角形的两个顶角为 2α 与 2β，则三角形的面积为 $S=r[\cot\alpha+\cot\beta+\tan(\alpha+\beta)]$，再由 $\frac{\partial S}{\partial\alpha}=0$ 与 $\frac{\partial S}{\partial\beta}=0$ 得到 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$。

12．提示：设圆半径为1，内接 n 边形的各边所对的圆心角为 $\alpha_k\ (k=1,2,\cdots,n)$，则 n 边形的面积为 $S=\frac{1}{2}[\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_{n-1}-\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})]$，由 $\frac{\partial S}{\partial\alpha_k}=0\ (k=1,2,\cdots,n-1)$ 推出 $\alpha_n=\frac{2\pi}{n}$。

13. 提示：令 $f(x,y)=yx^y(1-x)$，先对固定的 $x\in(0,1)$，求出 $f(x,y)$ 的极大值点为 $y=\frac{-1}{\ln x}$，极大值为 $\varphi(x)=\frac{-(1-x)}{e\ln x}$，再证明 $\varphi(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调增加，且 $\lim\limits_{x\to1-}\varphi(x)=\frac{1}{e}$.

14． $x=\frac{3\alpha-2\beta}{2\alpha^2-\beta^2}$， $y=\frac{4\alpha-3\beta}{4\alpha^2-2\beta^2}$。

第 7 节

1．(1) $f_{\max}=\frac{1}{4}$；(2) $f_{\max}=3$， $f_{\min}=-3$；(3) f 的极大值与极小值分别为方程 $\lambda^2+(\frac{A^2-1}{a^2}+\frac{B^2-1}{b^2}+\frac{C^2-1}{c^2})\lambda+(\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{B^2}{c^2a^2}+\frac{C^2}{a^2b^2})=0$ 的两个根。

2．面积最大的三角形为正三角形，最大面积为 $\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$。

3．底面半径为 $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$，高为 $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$。

4． $d_{\max}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$， $d_{\min}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$。

5． $S_{\max}=9$。

6． $d=\dfrac{|aA+bB+cC+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。

7．椭圆面积 $S=\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，其中 λ_1 与 λ_2 为方程

$$A^2\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right)+B^2\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right)+C^2\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right)\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right)=0$$

的两个根。

8． $f_{\min}=\dfrac{1}{16}a^4$。

9. $f_{\max}=\ln\left(6\sqrt{3}R^6\right)$. 提示：令 $L(x,y,z,\lambda)=xy^2z^3-\lambda(x^2+y^2+z^2-6R^2)$，由 $L_x=0$，$L_y=0$ 和 $L_z=0$，可得 $xy^2z^3=2\lambda R^2$ 和 $x^2=R^2$，$y^2=2R^2$，$z^2=3R^2$. 于是 $xy^2z^3\le 6\sqrt{3}R^6$，由此得到 $f_{\max}=\ln\left(6\sqrt{3}R^6\right)$；再令 $a=x^2$， $b=y^2$ 和 $c=z^2$，由 $xy^2z^3\le 6\sqrt{3}\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3$，得到 $ab^2c^3\le 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$。

10.（1） $f_{\max}=\left[\dfrac{a^ab^bc^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right]^{\frac{1}{k}}$.提示:与习题 9 类似，可得 $x^ay^bz^c\le\dfrac{\lambda k}{a+b+c}$ 和 $x^k=\dfrac{a}{a+b+c},y^k=\dfrac{b}{a+b+c},z^k=\dfrac{c}{a+b+c}$. 于是 $x^ay^bz^c\le\left[\dfrac{a^ab^bc^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right]^{\frac{1}{k}}$.

（2）令 $x^k=\dfrac{u}{u+v+w}$， $y^k=\dfrac{v}{u+v+w}$ 和 $z^k=\dfrac{w}{u+v+w}$，再利用（1）的结果。

11. $a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$， $b=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. 提示：先求 $(x-1)^2+y^2$ 在 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 条件下的极小值，令它为 1，得到关于 a,b 的关系式 $a^2b^2=a^2+b^4$；再求 $f(a,b)=\pi ab$ 在 $a^2b^2=a^2+b^4$ 条件下的极小值。

12. 提示：由于三角形 ABC 的面积取极大值，曲线 $f(x,y)=0,g(x,y)=0$ 与 $h(x,y)=0$ 在三个顶点处的切线分别平行于三角形的对边，从而在三个顶点处的法线分别垂直于三角形的对边。

13． $f_{\max}=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}$， $f_{\min}=-\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}$.

提示：由于 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $\{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1\}$ 没有驻点，所以只需要求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在约束条件 $\{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}$ 下的最大值与最小值。

14．设矩阵 $\left(a_{ij}-\delta_{ij}\lambda\right)_{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$，则 $f_{\max}=\lambda_n$， $f_{\min}=\lambda_1$。

15． $x_1=\dfrac{6p_1^{\alpha-1}p_2^{\beta}}{\alpha^{\alpha-1}\beta^{\beta}}$， $x_2=\dfrac{6p_1^{\alpha}p_2^{\beta-1}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta-1}}$。