复旦大学数学科学学院

2012～2013学年第二学期期末考试

■ 高数B（下）A 卷参考答案

1. (1)$z_x(1,1)=3,\ z_{xy}(1,1)=-4.$

(2)$\begin{cases}-x+2y+2z-3=0\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 或$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}.$

(3)$2\pi.$

(4)$\pi.$

(5)$\dfrac{e+e^{-1}}{2}-1.$

(6)2小时。

2.显然最大值可在$0\le x$及$y\le 0$且$x-y\le 1$时取到.

由$z_x=z_y=0$可解得：$x=y=0,\ z(0,0)=0;$

由$x=0$：$z=y^2,\ y=-1$时z取最大值1;

由$y=0$：$z=x^2,\ x=1$时z取最大值1;

由$y=x-1, x\in[0,1]$：$z=x^2-x+1,\ x=1$时z取最大值1;

所以z的最大值为1.

3.因为$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\dfrac{f''(0)}{2},$

所以$\exists N_0>0\forall n>N_0$: $|f(\dfrac{1}{n})-f(0)-f'(0)\dfrac{1}{n}|<\dfrac{|f''(0)|+1}{n^2}$, 因而：

(1)$f(0)\neq 0$时，级数发散；

(2)$f(0)=0, f'(0)\neq 0$时，级数条件收敛；

(3)$f(0)=f'(0)=0$时，级数绝对收敛。

4.记$r=\sqrt{x^2+y^2}$, 则$z_x=2xf(r^2)+2xr^2f'(r^2),$

$z_{xx}=2f(r^2)+[2r^2+8x^2]f'(r^2)+4x^2r^2f''(r^2),$

同理：$z_{yy}=2f(r^2)+[2r^2+8y^2]f'(r^2)+4y^2r^2f''(r^2),$

所以：$z_{xx}+z_{yy}=4f(r^2)+12r^2f'(r^2)+4r^4f''(r^2)=0.$

记$y(t)=f(e^t)$, 则：$y''+2y'+y=0,\ y=(C_1+C_2t)e^{-t}.$

所以：$f(x)=\dfrac{C_1+C_2\ln x}{x}$, 代入初始条件得：$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}.$

5.$S(x)=\ln(1+\frac{x}{2}),\ x\in(-2,2]$.

$$\ln(1+\frac{x}{2})=\ln\frac{3}{2}+\ln(1+\frac{x-1}{3})=\ln\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(x-1)^n$$

收敛域为$x\in(-2,4]$(但仅在$(-2,2]$上与$S(x)$相等).

6.

$$\Big(\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x\Big)^2=\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1\text{且}x,y\ge 0} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\int_0^1\int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_{x^2+y^2\le 2\text{且}x,y\ge 0} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

即可证得结论。

7(1)$a_0=1,a_n=0(n\ge 1),\ b_n=\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n\pi}$,

$$f(x)\sim S(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)x$$

$S(\frac{7\pi}{2})=S(-\frac{\pi}{2})=0,\ S(7\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}$.

(2)

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\big[\big(f(x)-g(x)\big)^2+g^2(x)\big]\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\big[2\big(\frac{f(x)}{2}-g(x)\big)^2+\frac{1}{2}f^2(x)\big]\mathrm{d}x$$

所以$A_i=\dfrac{a_i}{2},\ i=0,1,\ldots,10,\ B_i=\dfrac{b_i}{2},\ i=1,\ldots,10$.

又解：由$\dfrac{\partial}{\partial A_i}I=0$得：$A_i=\dfrac{a_i}{2},\ i=0,1,\ldots,10,$

由$\dfrac{\partial}{\partial B_i}I=0$得：$B_i=\dfrac{b_i}{2},\ i=1,\ldots,10$.