专业：______ （装订线内不要答题） 学号：______ 姓名：______

复旦大学数学科学学院

2015～2016 学年第二学期期末考试试卷

A 卷 参考答案

课程名称：<u>高等数学 B</u>　　课程代码：<u>MATH120004</u>

开课院系：<u>数学科学学院</u>　　考试形式：<u>闭卷</u>

一.计算和简答（6 分×8=48 分）

1. 设$z = xyf(2x+3y)$， 其中$f(t)$为一元二阶可导函数，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = y(\, f(2x+3y) + 2xf'(2x+3y)\,)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f(2x+3y) + (2x+3y)f'(2x+3y) + 6xyf''(2x+3y)$

2. 求曲面$z^3 = 2xyz - a^3$ 和曲面$x^2 = \frac{1}{2}(xy+yz)$的交线在点 A(a，a，a)处的切线方程($a \neq 0$ 为常数)。

设 $F(x,y,z) = z^3 - 2xyz + a^3$，　$(F_x', F_y', F_z')\big|_A = (-2a^2, -2a^2, a^2)$

设 $G(x,y,z) = x^2 - \frac{1}{2}(xy+yz)$，　$(G_x', G_y', G_z')\big|_A = (\frac{3}{2}a, -a, -\frac{1}{2}a)$

交线在 A 点的切向为：$(-2, -2, 1) \times (\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}) = (2, \frac{1}{2}, 5)$

所求切线方程：$\frac{x-a}{4} = y - a = \frac{z-a}{10}$

3. 设$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-y}}{y-1}dy$，求$\int_0^1 f(x)dx$

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{e^{-y}}{y-1}dy = \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{e^{-y}}{y-1}dx = e^{-1} - 1$

4. 求$z = x^3 + 2xy - y^3$ 的极大值和极小值。

驻点$P_1(0,0)$，$P_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$，　$H(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$，$H(P_2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

P_1不是极值点，P_2是极小值点。　$z(x,y)$无极大值，极小值为$-\frac{8}{27}$

5. 求$\iiint_{\Omega}(x+y)dxdydz$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le R^2, y\ge 0, z\ge 0\}$

$$\iiint_{\Omega}(x+y)dxdydz=\frac{1}{8}\pi R^4$$

6. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-3)^n}{5^n}$ 是否收敛？如果收敛求其和。

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{5^n}$ 是公比为$-\frac{3}{5}$ 的等比级数，故收敛，其和为$-\frac{3}{8}$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}}=\frac{1}{5}<1$，故收敛，其和为$\frac{5}{16}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{5^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-3)^n}{5^n}$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-3)^n}{5^n}$ 收敛， 其和为$-\frac{1}{16}$

7. 将函数 $f(x)=\frac{7}{8}\pi-\frac{1}{2}x$（$\pi\le x<2\pi$）展开成周期为$2\pi$的余弦级数，并求 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$。

f(x)按周期为2π 的偶函数延拓成：

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{2}x & x\in[0,\pi)\\ -\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{2}x & x\in[-\pi,0)\end{cases}$$

f(x) 是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{1}{4}\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{2}x\right)cosnxdx=\frac{1}{n^2\pi}cosnx\Big|_0^{\pi}=\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ -\frac{2}{\pi(2k-1)^2} & n=2k-1\end{cases}$$

$$f(x)\sim\frac{1}{8}\pi-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{8}\pi^2$$

8. 函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$在(0,0)是否可微？

$f'_x(0,0)=0,\quad f'_y(0,0)=0$

$$\lim_{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}->0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f'_x(0,0)-f'_y(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}->0}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

极限不存在，故$f(x,y)$ 在(0,0)不可微

二.(10 分) 求积分 $\iint_\Omega (x+y)^2dxdy$, 其中Ω是直线$y=x, y=2x$, $x+y=1$，和 $x+y=3$ 所围成的区域

作变换 $\begin{cases}s=\frac{y}{x}\\ t=x+y\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}x=\frac{t}{1+s}\\ x+y=t\end{cases}$

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)}=-\frac{x+y}{x^2}=-\frac{(1+s)^2}{t}$$

$$\iint_\Omega (x+y)^2dxdy=\int_1^2 ds\int_1^3(t^2\times\frac{t}{(1+s)^2})dt=\frac{10}{3}$$

三. (10 分) 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}(x-1)^{n-1}$的收敛域与和函数。

收敛半径 R=3， 收敛域为$[-2,4)$

当$x=1$ 时，$s(x)=\frac{1}{3}$

$$当x\neq 1 时，(x-1)s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(x-1)^n}{3^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1-x}{3}\right)^n$$

$$=-\ln(1+\frac{1-x}{3})=\ln 3-\ln(4-x)$$

和函数 $s(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & x=1\\ \frac{ln3-\ln(4-x)}{x-1} & x\in[-2,4),x\neq 1\end{cases}$

四. (10 分) 设由函数$y=f(x)$（在$(-\infty,\infty)$上二阶连续可导）所确定的曲线在$x=0$处的切线方程为$y=x-1$，且满足$\frac{df(x)}{dx}-4\int_0^x f(t)dt=e^{2x}$，求曲线的方程.

$f'(x)-4\int_0^x f(t)dt=e^{2x}$

两边关于 x 求导得：$f''-4f(x)=2e^{2x}$

问题化为：$\begin{cases} y''-4y=2e^{2x} \\ y(0)=-1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$

齐次方程的通解为：$C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

非齐次方程的通解为：$C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}$

所求曲线的函数为：$f(x)=-\frac{3}{8}e^{2x}-\frac{5}{8}e^{-2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}$

五. (10 分) 求曲面 $x^2+(y-x)^2+z^2=4$ 离原点最远和最近的距离。

曲面上任一点 (x,y,z) 到原点的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

问题化为条件极值问题：目标函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$$\text{s.t. } x^2+(y-x)^2+z^2=4$$

作 $L(x,y,z,\mu)=x^2+y^2+z^2+\mu(x^2+(y-x)^2+z^2-4)$

由$\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_z=0 \\ L'_\mu=0 \end{cases}$ 得:

$$\begin{cases} \mu=-1, x=0, y=0, z=\pm 2,\ f(x,y,z)=4 \\ z=0, \mu=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}, x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}y, f(x,y,z)=(\sqrt{5}\pm 1)^2 \\ z=0 \text{ 且 } \mu=-1，\text{无解} \end{cases}$$

所以 最远距离为 ：$\sqrt{5}+1$

最近距离为 ：$\sqrt{5}-1$

六. (12 分) 一蓄水池内有含盐 100kg 的 200 升盐水。 如果从某时刻起， 以 6 升/分钟的速度向蓄水池中注入每升含盐 2kg 的盐水，同时以 4 升/分钟的速度从蓄水池流出浓度均匀的盐水。（假设在混合过程中盐水的体积不变）

1）求蓄水池中盐水的体积随时间变化的函数； 2）求 60 分钟后蓄水池中盐的含量。

1）设盐水的体积为 L(t), t 为时间变量，单位分钟

$$L(t) = 200 + 2t\text{，} t \geq 0$$

2) 解法一

设 t 时刻蓄水池中盐水的浓度为$x(t)$

从 t 到 $t+\Delta t$ 蓄水池中盐量的变化：

$$L(t+\Delta t)x(t+\Delta t) - L(t)x(t) = 2\times(6\Delta t) - x(t+\theta\Delta t)(4\Delta t),$$

$$0 \leq \theta \leq 1 \text{ ，} \Delta t \to 0$$

可得方程：$(200+2t)x'(t) = 12 - 6x(t)$

问题化为：$\begin{cases} x'(t) + \frac{3}{100+t}x(t) = \frac{6}{100+t} \\ x(0) = 0.5 \end{cases}$

解得$x(t) = 2 - \frac{3\times 100^3}{2(100+t)^3}$

盐量$s(t) = L(t)x(t) = 4(100+t) - \frac{3\times 100^3}{2(100+t)^2}$ ，

$s(60) = 522.8125\text{kg}$

解法二

设 t 时刻蓄水池中盐量为$s(t)$

从 t 到 $t+\Delta t$ 蓄水池中盐量的变化：

$$s(t+\Delta t) - s(t) = 2\times(6\Delta t) - \frac{s(t+\theta\Delta t)}{L(t+\theta\Delta t)}(4\Delta t), 0\leq\theta\leq 1,\ \Delta t \to 0$$

问题化为：$\begin{cases} s'(t) + \frac{2}{100+t}x(t) = 12 \\ s(0) = 100 \end{cases}$

解得$s(t) = 4(100+t) - \frac{300\times 100^2}{2(100+t)^2}$ ， $s(60) = 522.8125\text{kg}$