复旦大学数学科学学院

2014～2015 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称：高等数学 B（上）　　课程代码：MATH 120003

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
得 分									

一、（本题共 40 分，每小题满分 5 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)[ln(x-1)-lnx]$

解答: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)[ln(x-1)-lnx] = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)ln(1-\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)(-\frac{1}{x}) = -1$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

解答: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

3. 已知函数 $f(x)=2^{lnx}+x^{ln2}$，求 $f'(x)$

解答: $f'(x)=2^{ln\,x}\cdot ln2\cdot\frac{1}{x}+ln2\cdot x^{ln2-1}$

4. 设向量 a 和向量 b 的夹角为 θ，且 $\|a\|=2$，$\|b\|=1$，求极限

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\|a\|+\|b\|-\|a+b\|}{\theta^2}$$

解答: $\lim\limits_{\theta\to0}\frac{\|a\|+\|b\|-\|a+b\|}{\theta^2} = \lim\limits_{\theta\to0}\frac{3-\sqrt{5+4\cos\theta}}{\theta^2} = \frac{1}{3}$

姓 名: ______ 学 号: ______ 专 业: ______

（装订线内不要答题）

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^2}$，求 $f'''(0)$

解答: 方法 1： 可逐阶求导得： $f'''(0)=6$

方法 2： $f(x)=(1-x)\cdot[1-x^2+o(x^3)]=1-x-x^2+x^3+o(x^3)$ ，得 $f'''(0)=6$

方法 3： $f'(0)=-1$ ，用 Leibniz 公式于等式 $(1+x^2)\cdot f(x)=1-x$ 两边，求三阶导数得：

$$(1+x^2)f'''(x)+6xf''(x)+6f'(x)=0$$ ，代入 $x=0$ ，得： $f'''(0)=6$

6. 已知函数 $y=xlnx$，求 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{x=1}$

解答: $$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=1}=\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}}=\left.\frac{1}{1+lnx}\right|_{x=1}=1$$

7. 求不定积分 $\int\dfrac{1}{(1-x)^2}ln\dfrac{1+x}{1-x}dx$

解答: 令 $\dfrac{1+x}{1-x}=t$

$$\int\frac{1}{(1-x)^2}ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int lntdt=\frac{1}{2}\cdot t\cdot(lnt-1)+c=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{1-x}\cdot\left[ln\frac{1+x}{1-x}-1\right]+c$$

8. 求反常积分 $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

解答： 方法 1： $$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}=2\arcsin\sqrt{x}\Big|_0^1=\pi$$

方法 2： $$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx=\arcsin\left.\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right|_0^1=\pi$$

方法 3：$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}dx = B(\frac{1}{2}，\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = \pi$

二、（本题共 12 分，每小题满分 6 分）

1. 在数列$\left\{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right\}$中，找出数值最小的项。

解答: 令 $y = \sqrt[x]{\frac{1}{x}}$ ，$y' = \sqrt[x]{\frac{1}{x}} \cdot \frac{lnx-1}{x^2}$ ，所以 $x=e$ 是最小值点，最小值为 $\sqrt[e]{\frac{1}{e}}$

又因为 $2<e<3$ ，且 $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} < \sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ ，所以数值最小的项是 $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ 。

2. 解方程：$\arctan\sqrt{x(x-1)} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{\pi}{2}$

解答：令 $f(x) = \arctan\sqrt{x(x-1)} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ ，得 $D_f = (-\infty,0]\cup[1,+\infty)$，

且 $f'(x)=0$ ，又 $f(0)=\frac{\pi}{2}$ ， $f(1)=\frac{\pi}{2}$ ，所以当 $x\in D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$ 时

$\arctan\sqrt{x(x-1)} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\forall x\in D_f=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$ 均为解。

三、（本题满分 8 分）已知曲线γ的极坐标方程由关系式： $\theta=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$ $(1\le r\le 3)$ 所确定，求曲线γ的长度。

解答：$L(\gamma) = \int_1^3\sqrt{(r\frac{d\theta}{dr})^2+1}\,dr = \frac{1}{2}\int_1^3(r+\frac{1}{r})dr = 2+\frac{ln3}{2}$

四、（本题满分 8 分）已知方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+\lambda x_3=0 \\ x_1+4x_2+\lambda^2 x_3=0 \end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=\lambda-1$

有公共解，求λ的值及所有公共解。

解答：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 4 & \lambda^2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)$ ，（1）当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq 2$ 时，无公共解。

（2）当 $\lambda=1$ 时，有公共解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=c\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$c\in R$，（3）当 $\lambda=2$ 时，有公共解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

五、（本题满分 8 分）一束光线沿直线：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ 照射到平面镜：

$2x+y-z+1=0$ 后反射，用直线的对称式方程写出反射光线所在的直线方程。

解答：方法 1: 先求得入射光线与平面镜的交点 $p_0(-1,0,-1)$，过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{1}$

上点 $p_1(1,-1,0)$ 作垂直于平面 $2x+y-z+1=0$ 的直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$，再求得点

p_1相对于平面的对称点 $p_2(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{2}{3})$，连接点 p_2 与 p_0 的直线 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{5}$ 即为所求。

方法 2: 记向量 $a=(2,-1,1)$为与入射光线平行，方向相反的向量，向量 b为与反射光线平行的向量，向量 $c=(2\lambda,\lambda,-\lambda)$为与平镜面法向量平行的向量，利用菱形对角线平分夹角得当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，$b=c-a=(-\frac{2}{3},\frac{5}{3},-\frac{5}{3})$，入射光线与平面镜的交点为 $p_0(-1,0,-1)$，所以反射光线所在的直线方程为：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+1}{5}$ 。

六、（本题满分 8 分）

（1）、写出直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-1}$ 绕 y 轴旋转而成的曲面方程。

（2）、求上述旋转曲面和平面 $y=0$, $y=1$ 所围几何体的体积。

解答：令 $\begin{cases} x= \ \ t+1 \\ y= 2t+1 \\ z=-t-2 \end{cases}$ ，得 $x^2+z^2=(1+t)^2+(-2-t)^2=\dfrac{1}{2}(y+2)^2+\dfrac{1}{2}$

（1）、绕 y 轴旋转而成的曲面方程为： $2x^2-(y+2)^2+2z^2=1$

（2）、 $V_y=\pi\cdot\int_0^1\left[\dfrac{1}{2}(y+2)^2+\dfrac{1}{2}\right]dy=\dfrac{11}{3}\pi$

七、（本题满分 10 分）讨论含参数 p 的反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p ln(1+x^2)}dx$ 的敛散性。

解答： $p>1$ 时，取 $r=p>1$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^r\dfrac{1}{x^p ln(1+x^2)}=0$，所以 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p ln(1+x^2)}dx$ 收敛。

$p<1$ 时，取 $p<r<1$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^r\dfrac{1}{x^p ln(1+x^2)}=+\infty$，所以 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p ln(1+x^2)}dx$ 发散。

$p=1$ 时， $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\,ln(1+x^2)}dx=\dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2\,ln(1+x^2)}d\,x^2=\dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{u\,ln(1+u)}du$

$>\dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{(1+u)ln(1+u)}du=\dfrac{1}{2}\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{t\,lnt}dt=+\infty$ 发散。

综上所述： $p>1$ 时， $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p ln(1+x^2)}dx$ 收敛 ，

$p\le 1$ 时， $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p ln(1+x^2)}dx$ 发散 。

八、（本题满分 6 分）已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(0)=0$ ， $f(1)=1$ ，在 $(0,1)$ 内 $f'(x)>0$，证明：对于任意给定的实数 $k_1>0, k_2>0, \cdots, k_n>0$，均存在 $(0,1)$ 内互不相同的实数 $t_1>0$，$t_2>0$，$\cdots$，$t_n>0$，使得 $\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(t_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i$。

解答：因为函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内 $f'(x)>0$，所以存在反函数 $x=f^{-1}(y)$ ，

$D(f^{-1})=[\,0\,,$ ； $R(f^{-1})=[0,1]$ 且 $f^{-1}(0)=0$， $f^{-1}(1)=1$，记 $k=\sum_{i=1}^{n}k_i$ ，将 $[0,1]$ 区间

分割为 $[0,\frac{k_1}{k}]$、 $[\frac{k_1}{k},\frac{k_1+k_2}{k}]$、 $[\frac{k_1+k_2}{k},\frac{k_1+k_2+k_3}{k}]$、 ……、 $[\frac{k_1+\cdots+k_{n-1}}{k},1]$，在各自

区间上对函数 $x=f^{-1}(y)$ 运用 Lagrange 中值定理：存在互不相同 $s_i\in[\frac{k_1+\cdots+k_{i-1}}{k},\frac{k_1+\cdots+k_i}{k}]$

$(i=1,2,\cdots,n)$，使得：$1=f^{-1}(1)-f^{-1}(0)=\sum_{i=1}^{n}\left[f^{-1}\left(\frac{k_1+\cdots+k_i}{k}\right)-f^{-1}\left(\frac{k_1+\cdots k_{i-1}}{k}\right)\right]=$

$\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{d f^{-1}(y)}{dy}\right|_{y=s_i}\frac{k_i}{k}=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{1}{\frac{d f(x)}{dx}}\right|_{x=t_i}\frac{k_i}{k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(t_i)}\frac{1}{k}$ ，{ 其中，因为 $f(x)$ 严格单增，因此 t_i，$(i=1,2,\cdots,n)$ 亦互不相同 }，

所以对于任意给定的实数 $k_1>0, k_2>0, \cdots, k_n>0$，均存在 $(0,1)$ 内互不相同的实数

$t_1>0$，$t_2>0$，$\cdots$，$t_n>0$，使得 $\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(t_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i$。