复旦大学数学科学学院

2010～2011 学年第二学期期末考试试卷

A 卷答案

课程名称：___高等数学 B(下)________ 课程代码：_MATH120004.02.05_

开课院系：____数学科学学院__________ 考试形式：闭卷

姓　名：______________ 学　号：______________ 专　业：______________

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									
题 号	9	10							
得 分									

（装订线内不要答题）

(以下为试卷正文)

1.（10 分）函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(x,y)=(0,0)$ 处是否可微，为什么？

解：函数在 $(0,0)$ 处连续，且两个一阶偏导数都为 1，但 $\left[\dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限不存在，所以函数在 $(0,0)$ 处不可微。

2.（10 分）设 $f(u,v)$ 在平面上具有二阶连续偏导数，$z=f\left(x^2\sin y, y^3\cos x\right)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f_u x\sin y-f_v y^3\sin x$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2f_u x\cos y+f_{uu}x^3\sin 2y+6f_{uv}xy^2\sin y\cos x$$
$$-3f_v y^2\sin x-f_{uv}x^2y^3\sin x\cos y-3f_{vv}y^5\sin x\cos x$$ 。

3.（10 分）求椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ 和平面 $2x+2y+z+5=0$ 之间的最短距离。

解：椭球面上点 (x,y,z) 处的法向量为 $\left(x,2y,\dfrac{z}{2}\right)$，当它与向量 $(2,2,1)$ 平行时，则有

$x=2y=z$，代入椭球面，有 $(x,y,z)=\pm\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$，这两点到已知平面的距离分别是 3

和 1/3。而它们所相应的切平面为 $2x+2y+z\pm 4=0$，显然已知平面不在这两个平面之间。所以要求的最短距离为 1/3。

4.（10 分）计算二重积分 $\iint\limits_{\Sigma}|x+y+1|dxdy$，其中 $\Sigma=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2+x+y\le\dfrac{1}{2}\right\}$。

解：
$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}|x+y+1|dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x+y|dxdy=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1,x+y\ge 0}(x+y)dxdy\\&=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^1 r^2dr=\frac{4\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$
。

5.（10 分）求曲面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 和平面 $z=4$ 所围的有限立体的体积，这里 a 和 b 是两个正实数。

解：
$$\begin{aligned}&V=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 4}dxdy\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}^{4}dz=16\pi ab-\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 4}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy\\&=16\pi ab-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 abr^3dr=8\pi ab\end{aligned}$$
。

6.（10 分）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n(n+1)}$ 的和。

解：令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{3^n(n+1)}$，则 $S(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n(n+1)},S(0)=0$。求导，有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^n}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}x}-1=\frac{3}{3+x}-1。$$

再积分，又有 $S(x)=3\ln(3+x)-3\ln 3-x$，故 $S(1)=6\ln 2-3\ln 3-1$。

7.（10 分）将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ 在 $(0,2\pi)$ 内展开成以 2π 为周期的 Fourier 级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和。

（装订线内不要答题）

解： $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}=\sum_{1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}, x\in(0,2\pi)$，由 Parseval 等式，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$。

8.（10 分）设 p 是一个实数，分析级数 $1-\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^p}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{(2n)^p}+\cdots\cdots$ 的收敛性，给出详细理由。

解：1）$p\le 0$，此时通项不趋于 0，级数发散。 2）$p\ge 1$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^p}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ 发散，所以原级数一定发散。3）$p=1$，级数显然收敛。4）$0<p<1$，此时，由比值判别法的极限形式，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(2n)^p}-\dfrac{1}{2n-1}\right)$（当 n 适当大后，级数是正项级数）与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^p}$ 具有相同的收敛性，由此推得原级数发散。

9.（10 分）求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x^2y+2x}$ 的通解。

解：求 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x^2y+2x}{y}=x^2+\dfrac{2}{y}x$ 这个 Bernoulli 方程的通解，即 $\dfrac{du}{dy}+\dfrac{2}{y}u=-1$ 的通解，这里 $u=x^{-1}$。显然 $u=-\dfrac{1}{3}y$ 是它的一个特解。其通解为 $u=Cy^{-2}-\dfrac{1}{3}y$，即 $x^{-1}=Cy^{-2}-\dfrac{1}{3}y$ 为原方程的通解。另一个解法：令 $u=xy$，可以将方程化为变量可分离方程 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u(u+3)}{x(u+2)}$。

10.（10 分）设 $f(x)$ 是实数轴上的连续函数，且满足 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\cos x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$。

解：等价于求定解问题： $y''+y=\dfrac{1-\cos x}{2}, y(0)=\dfrac{1}{2}, y'(0)=0$。方程 $y''+y=\dfrac{1}{2}$ 有特解 $y_1=\dfrac{1}{2}$，方程 $y''+y=-\dfrac{\cos x}{2}$ 有特解 $y_2=-\dfrac{1}{4}x\sin x$，由解的叠加定理，$y''+y=\dfrac{1-\cos x}{2}$ 有特解 $y^*=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x\sin x$，其通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x\sin x$，将定解条件代入，有 $C_1=0$，$C_2=0$。所以原定解问题的解为 $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x\sin x$。