

复旦大学数学科学学院

2007~2008 学年第一学期期末考试试卷

A 卷 B 卷

课程名称: 高等数学 B(上) 课程代码: **MATH120003.03**

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	总 分
得 分									
题 号	9	10	11	12	13	14	15	16	
得 分									

(以下为试卷正文)

注意: 答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

1. 设函数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$, 问 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相等, 为什么? (4 分)

2. 设数列 $\{x_n\}$ 是一个无穷小量, $\forall n, x_n > 0$, 问 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 是否是无穷小量? 如果是请证明, 否则请举出反例。(4 分)

3. 以下计算是否正确? 为什么? $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) dx = \arctan \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = \arctan 1 - \arctan(-1)$

$= \frac{\pi}{2}$ 。(4 分)

4. A 和 B 两个 n 阶方阵, 若 $AB=0$, 是否可以推出 $A=0$ 或 $B=0$? 如果是请证明, 不是请举出反例。(4 分)

5. 设函数 f 在 $x = x_0$ 处连续, 且 $f(x_0) > 0$, 用函数连续的定义证明: $\exists \delta > 0$ 在, 当 $x \in O(x_0, \delta)$ 时 $f(x) > 0$ 。(6 分)

6. 确定常数 a, b 使函数 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$ 有连续的导数。(6 分)。

7. 求函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 的 n 阶导数。(6 分)

8. 求函数 $\int_x^{\sin x} \sqrt{1+t^2} dt$ 的导数。(6 分)

9. 求过点 $(-1, 2, 1)$ 和直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{-1}$ 的平面的一般方程。(4 分)

10. 设 \mathbf{A} 是 3 阶方阵, \mathbf{A}^* 是其伴随矩阵, 若 $|\mathbf{A}| = \frac{1}{24}$, 求 $\left| \left(\frac{1}{2} \mathbf{A} \right)^{-1} - 120 \mathbf{A}^* \right|$. (6 分)

11. 求下列极限。(8 分)

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$ (4 分)

2) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \tan \frac{\pi}{2} x$ (4 分)

12. 求下列积分 (12 分)

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ (4 分)

2) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$ (4 分)

3) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ (4 分)

13. 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \end{cases}$, 计算 $I = \int_1^4 f(x-2) dx$. (6 分)

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 证明: $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. (8 分)

15. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可微, 并且 $ab > 0$, 证明:

$$\frac{1}{a-b} \left| \begin{array}{cc} a & b \\ f(a) & f(b) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi), \text{ 其中 } a < \xi < b \text{ (8 分)}$$

16. 在经济学中, 称函数 $Q(x) = A(\delta K^{-x} + (1-\delta)L^{-x})^{-\frac{1}{x}}$ 为固定替代弹性生产函数, 而称 $\bar{Q} = AK^\delta L^{1-\delta}$ 为 Cobb-Douglas 生产函数, 简称 C-D 生产函数; 试证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 固定替代弹性生产函数变为 C-D 生产函数, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} Q(x) = \bar{Q}$ 。(8 分)