复旦大学数学科学学院

2012 ～2013 学年第 一 学期期末考试试卷 A 卷答案

课程名称：____高等数学（B 上）__　　课程代码：___MATH120003.04___

开课院系：____数学科学学院______　　考试形式：　　　闭卷

姓　名：________________　学　号：________________　专　业：________________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总分
得分											

一.（15 分，每小题 5 分）求下面的极限：

1． $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^n = e^3$；

2． $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\int_0^{\sqrt{x}}\ln(1+t^4)dt}{x^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{1}{5}$；

3． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\sin x+\ln(1+x)}{x\sin^2 x} = \dfrac{1}{2}$。

二.（15 分，每小题 5 分）计算下面各题：

1． $f^{(10)}(x) = (2^8\times 90-2^{10}x^2)\cos 2x-(2^{11}\times 5)x\sin 2x$；

2． $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+2\cos x}{3\sin x+\cos x}dx = \left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\ln(3\sin x+\cos x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{4}\pi+\dfrac{1}{2}\ln 3$；

3． $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{1-2t}dx = \dfrac{1}{2}\int_0^1 u^{-t}(1-u)^{t-1}du = \dfrac{1}{2}B(t,1-t) = \dfrac{1}{2}\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \dfrac{\pi}{2\sin t\pi}$。

三.（10 分）判断广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^4)}{x^p}dx$ **的收敛性，其中** p **是一个实参数。**

解： $1<p<5$ **是广义积分收敛的充要条件。**

四.（10 分）设 Γ **是空间曲线：** $y=e^{\frac{x^2}{2}}, z=0, x\geq 0$，**将该曲线绕坐标** y **轴旋转一周，**

1）求所成曲面上的点满足的方程；2）求所成曲面与平面 $y=e$ **围成的有界立体的**

体积。

解：所成曲面上的点满足的方程为 $y=e^{\frac{x^2+z^2}{2}}$。所求的体积为 $V=\int_1^e 2\pi\ln y dy=2\pi$

五.（**10** 分）设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，证明：$\frac{x}{\sin x}<\frac{\tan x}{x}$。

解：略。

六.（**8** 分）已知直线 ℓ 经过点 $(11,9,0)$，且与直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3}$ 和直线 $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ 相交，求直线 ℓ 的方程。

解：平面 $7x-5y+2z-32=0$ 和平面 $15x-17y-46z-12=0$ 的交线。直线有方向 $(6,8,-1)$，其对称式方程为 $\frac{x-11}{6}=\frac{y-9}{8}=\frac{z}{-1}$。

七.（**8** 分）设平面 π 过直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-1}$，且平行于直线 $\frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$，求平面 π 的方程。

解：平面 π 的方程为 $y+z-3=0$。

八.（**8** 分）已知线性方程组 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+ky+3z=0 \\ 3x+5y+kz=1 \end{cases}$ 有唯一解，请决定参数 k 的取值范围，并求出方程组相应的唯一解。

解：$k\neq 1,4$ 时方程组有唯一解：$x=\frac{3-k}{(4-k)(k-1)}$，$y=\frac{1}{(4-k)(k-1)}$，$z=\frac{2-k}{(4-k)(k-1)}$。

九.（**10** 分）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有非负的二阶导函数，在 $x=0$ 处连续，并且 $f(0)=0$，证明：对于任意的 $x_1>0,x_2>0$，都有 $f(x_1+x_2)\geq f(x_1)+f(x_2)$。

解：无妨设 $x_1\leq x_2$，分别在区间 $[0,x_1]$ 和区间 $[x_2,x_1+x_2]$ 上对函数 $f(x)$ 应用 **Lagrange** 中值定理及一阶导函数的单调不减条件。

十.（**6** 分）设 $a<b$，$f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_a^b (f(x))^n dx\right]^{1/n}=\max_{a\leq x\leq b} f(x)。$$

解：应用定积分的大小比较性质和极限夹逼法则，略。