首届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案

（数学类，2010）

一、 填空题

（1） 设$\beta>\alpha>0$，则$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx=$ $\underline{\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})}$.

（2）若关于x的方程$kx+\frac{1}{x^2}=1(k>0)$在区间$(0,+\infty)$中有惟一实数解，则常数$k=$ $\underline{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$.

（3）设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续.由积分中值公式有$\int_a^x f(t)dt=(x-a)f(\xi)\quad(a\le\xi\le x<b)$.

若导数$f_+'(a)$存在且非零， 则$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}$的值等于 $\underline{\frac{1}{2}}$.

（4）设$(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{c}=6$，则$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\bullet(\vec{a}+\vec{c})=$___12________.

二、设$f(x)$在$(-1,1)$内有定义，在$x=0$处可导，且$f(0)=0$.证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}$.

证： 根据题目假设和泰劳展开式，我们有$f(x)=f(0)+f'(0)x+\alpha(x)x,$其中$\alpha(x)$是$x$的函数，

$\alpha(0)=0,$且$\alpha(x)\to0,$当$x\to0$。

因此，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$|\alpha(x)|<\varepsilon,$只要$|x|<\delta$。

对于任意自然数n和$k\le n$，我们总有$f\left(\frac{k}{n^2}\right)=f'(0)\frac{k}{n^2}+\alpha\left(\frac{k}{n^2}\right)\frac{k}{n^2}$。

取$N>\delta^{-1}$，对于上述给定的$\varepsilon>0$，便有

$$\left|\alpha\left(\frac{k}{n^2}\right)\right|<\varepsilon,\text{只要}n>N,k\le n\text{。}$$

于是，$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f'(0)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right|\le\varepsilon\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2},$只要$n>N$。

此式又可写成$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-\frac{1}{2}f'(0)(1+\frac{1}{n})\right|\le\frac{\varepsilon}{2}(1+\frac{1}{n}),$只要$n>N$。

令$n\to\infty$，对上式取极限即得

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)\le \frac{1}{2}f^{'}(0)+\frac{\varepsilon}{2} \quad 和 \liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)\ge \frac{1}{2}f^{'}(0)-\frac{\varepsilon}{2}$$

由ε的任意性，即得$\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\liminf\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}f^{'}(0)$。证毕。

三、设 $f(x)$ 在$[0,\infty)$上一致连续，且对于固定的$x\in[0,\infty)$，当自然数$n\to\infty$时 $f(x+n)\to 0$.证明函数序列$\{f(x+n):n=1,2,\ldots\}$在$[0,1]$上一致收敛于 0.

证：由于 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上一致连续，故对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$使得

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{2},只要\left|x_1-x_2\right|<\delta\ \ (x_1\ge 0, x_2\ge 0)$$

取一个充分大的自然数m，使得$m>\delta^{-1}$，并在$[0,1]$中取m个点:

$$x_1=0<x_2<\ldots<x_m=1,$$

其中$x_j=\dfrac{j}{m}\ \ (j=1,2,\ldots,m)$。这样，对于每一个 j，

$$\left|x_{j+1}-x_j\right|=\frac{1}{m}<\delta。$$

又由于$\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$，故对于每一个$x_j$，存在一个$N_j$使得

$$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2},只要n>N_j,$$

这里的ε是前面给定的。令$N=\max\{N_1,\ldots,N_m\}$，那么

$$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2},只要n>N,$$

其中 $j=1,2,\ldots,m$。 设$x\in[0,1]$是任意一点，这时总有一个x_j使得$x\in[x_j,x_{j+1}]$。

由 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上一致连续性及$\left|x-x_j\right|<\delta$可知，

$$\left|f(x_j+n)-f(x+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ (\forall n=1,2,\ldots)$$

另一方面，我们已经知道

$$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2},只要n>N$$

这样，由后面证得的两个式子就得到

$$\left|f(x+n)\right| < \varepsilon, \text{只要} n > N, x \in [0,1]$$

注意到这里的 N 的选取与点 x 无关，这就证实了函数序列 $\{f(x+n): n=1,2,...\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0。

四、设 $D=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$，$f(x,y)$ 在 D 内连续，$g(x,y)$ 在 D 内连续有界，且满足条件：（1）当 $x^2+y^2 \to 1$ 时，$f(x,y) \to +\infty$；（2）在 D 内 f 与 g 有二阶偏导数，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^f$ 和 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} \ge e^g$.证明：$f(x,y) \ge g(x,y)$ 在 D 内处处成立.

证：用反证法。假定该不等式在某一点不成立，我们将导出矛盾。

令 $F(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$. 那么，根据题目假设，当 $x^2+y^2 \to 1$时，$F(x,y) \to +\infty$.

这样，$F(x,y)$ 在 D 内必然有最小值。设最小值在 $(x_0,y_0) \in D$ 达到。

根据反证法假设，我们有

$$F(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)-g(x_0,y_0)<0. \qquad \text{(i)}$$

另一方面，根据题目假设，我们又有

$$\Delta F=\Delta f-\Delta g \le e^{f(x,y)}-e^{g(x,y)}, \qquad \text{(ii)}$$

其中 Δ 是拉普拉斯算子：$\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

式子（ii）在 D 中处处成立，特别地在 (x_0,y_0) 成立：

$$\Delta F_{(x_0,y_0)}=\Delta f\Big|_{(x_0,y_0)}-\Delta g\Big|_{(x_0,y_0)} \le e^{f(x_0,y_0)}-e^{g(x_0,y_0)}. \qquad \text{(iii)}$$

由(i)与(iii)可知，$\Delta F_{(x_0,y_0)}<0$. (iv)

但是，(x_0,y_0) 是 $F(x,y)$ 的极小值点，应该有 $F_{xx}(x_0,y_0) \ge 0; F_{yy} \ge 0,$ 并因此 $\Delta F|_{(x_0,y_0)} \ge 0$

这与（iv）矛盾。此矛盾证明了题目中的结论成立。证毕。

五、分别设

$$R=\{(x,y): 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}, \quad R_\varepsilon=\{(x,y): 0 \le x \le 1-\varepsilon; 0 \le y \le 1-\varepsilon\}.$$

考虑积分 $I=\iint_R \frac{dxdy}{1-xy}$ 与 $I_\varepsilon=\iint_{R_\varepsilon} \frac{dxdy}{1-xy}$，　定义 $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon$.

（1) 证明 $I=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$；

（2)利用变量替换：$\begin{cases} u=\frac{1}{2}(x+y) \\ v=\frac{1}{2}(y-x) \end{cases}$　计算积分 I 的值，并由此推出 $\frac{\pi^2}{6}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

证： 显然，$I_\varepsilon=\iint_{R_\varepsilon}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(xy)^n dxdy$

注意到上述级数在 R_ε 上的一致收敛性，我们有

$$I_\varepsilon=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{1-\varepsilon} x^n dx\int_0^{1-\varepsilon} y^n dy=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\varepsilon)^{2n}}{n^2}\text{。}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}$ 在点 $x=1$ 收敛，故有 $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。

下面证明 $I=\frac{\pi^2}{6}$. 在给定的变换下，$x=u-v, y=u+v$，那么 $\frac{1}{1-xy}=\frac{1}{1-u^2+v^2}$，

变换的雅可比行列式，$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=2$。

假定正方形 R 在给定变换下的像为 $\widetilde{R}$，那么根据 $\widetilde{R}$ 的图象以及被积函数的特征，我们有

$$I=2\iint_{\widetilde{R}}\frac{1}{1-u^2+v^2}dudv=4\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right)du+4\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\int_0^{1-u}\frac{dv}{1-u^2+v^2}\right)du$$

利用 $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\ \ (a>0),$

又得

$$I=4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}du+4\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}du.$$

令 $g(u)=\arctan\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}; h(u)=\arctan\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}=\arctan\sqrt{\frac{1-u}{1+u}},$

那么 $g^{'}(u)=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}};h^{'}(u)=-\dfrac{2}{\sqrt{1-u^2}}$ 。

最后，我们得到

$$I=4\int_0^{\frac{1}{2}}g^{'}(u)g(u)du-8\int_{\frac{1}{2}}^{1}h^{'}(u)h(u)du$$

$$=2[g(u)]^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}-4[h(u)]^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}\quad=2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2-0-0+4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2=\frac{\pi^2}{6}\text{。}$$

六、已知两直线的方程：$L:x=y=z$，$L':\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z-b}{1}$。（1）问：参数 a,b 满足什么条件时，L 与 L' 是异面直线？（2）当 L 与 L' 不重合时，求 L' 绕 L 旋转所生成的旋转面 π 的方程，并指出曲面 π 的类型。

解：（1） L,L' 的方向向量分别为 $\vec{n}=(1,1,1),\overrightarrow{n'}=(1,a,1)$ 。

分别取 L,L' 上的点 $O(0,0,0),P(0,0,b)$ 。L 与 L' 是异面直线当且仅当矢量 $\vec{n},\overrightarrow{n'},\overrightarrow{OP}$ 不共面，即，它们的混合积不为零：

$$(\vec{n},\overrightarrow{n'},\overrightarrow{OP})=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&1\\0&0&b\end{vmatrix}=(a-1)b\neq 0,$$

所以，L 与 L' 是异面直线当且仅当 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$ 。

（2）假设 $P(x,y,z)$ 是 π 上任一点，于是 P 必定是 L' 上一点 $P'(x',y',z')$ 绕 L 旋转所生成的。由于 $\overrightarrow{P'P}$ 与 L 垂直，所以，

$$(x-x')+(y-y')+(z-z')=0 \qquad ①$$

又由于 P' 在 L' 上，所以，

$$\frac{x'}{1}=\frac{y'}{a}=\frac{z'-b}{1}\quad, \qquad ②$$

因为 L 经过坐标原点，所以，P,P' 到原点的距离相等，故，

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2\quad, \qquad ③$$

将①，②，③联立，消去其中的 x',y',z'：

令 $\dfrac{x'}{1}=\dfrac{y'}{a}=\dfrac{z'-b}{1}=t$，将 x',y',z' 用 t 表示：

$$x'=t,y'=at,z'=t+b\quad, \qquad ④$$

将④代入①，得

$$(a+2)t = x+y+z-b \quad , \qquad ⑤$$

当$a \neq -2$，即L与L'不垂直时，解得$t = \dfrac{1}{a+2}(x+y+z-b)$，据此，再将④代入③，得到$\pi$的方程：

$$x^2+y^2+z^2-\frac{a^2+2}{(a+2)^2}(x+y+z-b)^2-\frac{2b}{a+2}(x+y+z-b)-b^2=0\,,$$

当$a=-2$时，由⑤得，$x+y+z=b$，这表明，π在这个平面上。

同时，将④代入③，有$x^2+y^2+z^2=6t^2+2bt+b^2=6(t+\frac{1}{6}b)^2+\frac{5}{6}b^2$。由于$t$可以是任意的，所以，这时，$\pi$的方程为：

$$\begin{cases} x+y+z=b \\ x^2+y^2+z^2 \geq \dfrac{5}{6}b^2 \end{cases},$$

π的类型：$a=1$且$b\neq 0$时，L与L'平行，π是一柱面；$a\neq 1$且$b=0$时，L与L'相交，π是一锥面（$a=-2$时π是平面）；当$a\neq 1$且$b\neq 0$时，π是单叶双曲面（$a=-2$时，π是去掉一个圆盘后的平面）。

七、设 A,B 均为 n 阶半正定实对称矩阵，且满足 $n-1\le \mathrm{rank}\ A\le n$. 证明存在实可逆矩阵 C 使得 C^TAC, C^TBC 均为对角阵.

证明 （1） A 的秩为 n 的情形：此时， A 为正定阵。于是存在可逆矩阵 P 使得

$$P^TAP=E\text{。}$$

因为 P^TBP 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q 使得 $Q^T(P^TBP)Q=\Lambda$ 是对角矩阵。

令 $C=PQ$，则有 $C^TAC=E, C^TBC=\Lambda$ 都是对角阵。

（2） A 的秩为 $n-1$ 的情形：此时，存在实可逆矩阵 P 使得 $P^TAP=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

因为 P^TBP 是实对称矩阵，所以，可以假定 $P^TBP=\begin{pmatrix} B_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$，其中 B_{n-1} 是 $n-1$ 阶实对称矩阵。

因为 B_{n-1} 是 $n-1$ 阶实对称矩阵，所以存在 $n-1$ 阶正交矩阵 Q_{n-1}，使得

$$Q_{n-1}^TB_{n-1}Q_{n-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}=\Lambda_{n-1}\text{ 为对角阵。}$$

令 $Q=\begin{pmatrix} Q_{n-1} & \\ & 1 \end{pmatrix}, C=PQ$，则 C^TAC, C^TBC 可以表示为

$$C^TAC=\begin{pmatrix} E_{n-1} & \\ & 0 \end{pmatrix}, C^TBC=\begin{pmatrix} \Lambda_{n-1} & \eta \\ \eta^T & d \end{pmatrix},$$

其中 $\eta=(d_1,d_2,...,d_{n-1})^T$ 是 $n-1$ 维列向量。

为简化记号， 我们不妨假定 $A=\begin{pmatrix} E_{n-1} & \\ & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} \Lambda_{n-1} & \eta \\ \eta^T & d \end{pmatrix}$。

如果 $d=0$，由于 B 是半正定的，B 的各个主子式均 ≥ 0。考虑 B 的含 d 的各个 2 阶主子式，容易知道， $\eta=0$。此时 B 已经是对角阵了，如所需。

现假设 $d\ne 0$。显然，对于任意实数 k， A,B 可以通过合同变换同时化成对角阵当且仅当同一合同变换可以将 $A, kA+B$ 同时化成对角阵。由于 $k\ge 0$ 时， $kA+B$ 仍然是半正定矩阵，由（1），我们只需要证明：存在 $k\ge 0$， $kA+B$ 是可逆矩阵即可。

注意到，当 $k+\lambda_i$ 都不是 0 时，行列式

$$
|kA+B| = \begin{vmatrix} k+\lambda_1 & & & d_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & k+\lambda_{n-1} & d_{n-1} \\ d_1 & \cdots & d_{n-1} & d \end{vmatrix} = \left(d - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{{d_i}^2}{k+\lambda_i}\right) \prod_{j=1}^{n-1} (k+\lambda_j)
$$

故只要 k 足够大就能保证 $kA+B$ 是可逆矩阵。从而 A,B 可以通过合同变换同时化成对角阵。证毕。

八、设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间，$f_j:V\to\mathbb{C}$ 是非零的线性函数，$j=1,2$. 若不存在 $0\neq c\in\mathbb{C}$ 使得 $f_1=cf_2$，证明: 任意的 $\alpha\in V$ 都可表为 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ 使得 $f_1(\alpha)=f_1(\alpha_2)$，$f_2(\alpha)=f_2(\alpha_1)$.

证明： 记 $E_j = Ker\ \ f_j, j=1,2$。由 $f_j\neq 0$ 知 $\dim E_j = n-1, j=1,2$。

不失一般性，可令

$V=\mathbb{C}^n=\left\{\alpha=(x_1,...,x_n): x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{C}\right\}$， $f_j(\alpha)=a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+...+a_{jn}x_n, j=1,2$。

由 $f_1\neq 0, f_2\neq 0$， $f_1\neq cf_2,\forall c\in\mathbb{C}$，知

$$
\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0 \end{cases}
$$

的系数矩阵之秩为 2。

因此其解空间维数为 $n-2$，即 $\dim(E_1\cap E_2)=n-2$。

但 $\dim E_1+\dim E_2=\dim(E_1+E_2)+\dim(E_1\cap E_2)$ ，故有 $\dim(E_1+E_2)=n$ ，即 $E_1+E_2=V$。

现在，任意的 $\alpha\in V$ 都可表为 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ ，其中 $\alpha_1\in E_1,\alpha_2\in E_2$ 。注意到 $f_1(\alpha_1)=0, f_2(\alpha_2)=0$，因此 $f_1(\alpha)=f_1(\alpha_2)$， $f_2(\alpha)=f_2(\alpha_1)$。证毕。