

第二届全国大学生数学竞赛预赛试卷 (非数学类, 2010)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	25	15	15	15	15	15	100
得分							

注意: 1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3、如当题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题共 5 小题, 每小题各 5 分, 共 25 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 设 $x_n = (1+a) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n})$, 其中 $|a| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

(3) 设 $s > 0$, 求 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx$ ($n=1, 2, \dots$).

(4) 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = f\left(\frac{1}{r}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(5) 求直线 $l_1: \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离.

专业:

年级:

所在院校:

身份证号:

姓名:

线
—
封
—
密

得 分	
评阅人	

二、(本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数,

并且 $f''(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$, 且存在一

点 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$. 证明: 方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 恰有两个实根.

姓名：_____ 身份证号：_____ 所在院校：_____ 年级：_____ 专业：_____

密 封 线

得 分	
评阅人	

三、（本题共 15 分）设函数 $y = f(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t > -1) \text{ 所确定. 且 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}, \text{ 其中 } \psi(t) \text{ 具有}$$

二阶导数，曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \frac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$.

得 分	
评阅人	

四、(本题共 15 分) 设 $a_n > 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 证明:

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha \leq 1$, 且 $S_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

姓名：_____ 身份证号：_____ 所在院校：_____ 年级：_____ 专业：_____

密 封 线

得 分	
评阅人	

五、(本题共 15 分) 设 l 是过原点、方向为 (α, β, γ) (其中 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) 的直线, 均匀椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (\text{其中 } 0 < c < b < a, \text{ 密度为 } 1) \text{ 绕 } l \text{ 旋转.}$$

- (1) 求其转动惯量;
- (2) 求其转动惯量关于方向 (α, β, γ) 的最大值和最小值.

得 分	
评阅人	

六、(本题共 15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上, 曲线积分

$\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2 + y^2 = 1$. 证明: $\oint_L \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = 0$;

(2) 求函数 $\varphi(x)$;

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求 $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$.