

复旦大学数学科学学院
2010~2011 学年第 2 学期期末考试试卷
A 卷答案

一 (10 分) 计算下列极限:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arcsin[(1+x^2)(x^2+y^2)]}{(x^2+y^2)}$ 。 答案: 1

2. $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$, 其中 $D_r = \{(x,y) | (x-6)^2 + (y-4)^2 \leq r^2\}$ 。 答案: $\frac{\pi}{e^{100}}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ 。 答案: 0

二 (10 分) 设 $y = x + t + \sin t$, $\sin(x + y + t) + 2t = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

答案: $y' = \frac{2 - \cos t \cdot \cos(x+y+t)}{2 + (\cos t + 2) \cdot \cos(x+y+t)}$

三 (10 分) 求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积。

答案: $\frac{6\sqrt{6}}{|a^3|}$

四 (10 分) 说明 $\iint_{[1,2] \times [1,2]} [e^{x^2} + e^{-y^2}] dx dy \geq 2$ 。

答案: 略

五 (10 分) 由方程 $3z = x^2 + y^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所表示的两个曲面围成两个物体, 求较小的物体体积与较大的物体体积之比。

答案: $\frac{19}{45}$

六（10分）求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}n!} x^n$ 的和函数。

答案： $e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right) \quad -\infty < x < +\infty$

七（10分）求微分方程 $y'' - \frac{y'}{x} + 1 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = \frac{7}{4}$, $y'|_{x=1} = 1$ 的特解。

答案： $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x + 1$

八（10分）求微分方程 $y'' + y' = \cos x + x + 1$ 的通解。

答案： $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x + x^2)$

九（10分）已知某公司生产的光盘为次品的概率为 0.01，且相互独立。该公司按包出售光盘，每包 10 张，且做出保证：每包里最多有一个次品光盘，否则予以退货处理。如果某人买了 3 包，问正好要退货 1 包的概率有多大？

答案： $P=0.0127$

十（10分）设随机变量 X 表示某个电子设备的寿命（单位：小时），其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 10x^{-2}, & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}$$

1. 求 $P(X > 20)$
2. 如果一个消费者一直购买这个产品，一次买一个，直至购买到的产品寿命小于 20 小时为止。问这个消费者购买总次数的期望值。

答案：1. 0.5; 2. 2