答案与提示

矩阵与行列式练习题

§1 向量与矩阵

1．（1）$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$。不成立；

（2）$(\boldsymbol{AB})^T=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$。不成立。

2．-3。

3．$x=-1$。

4．$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$。

5．（1）$\boldsymbol{AD}=\begin{pmatrix}d_1a_{11}&d_2a_{12}&\cdots&d_na_{1n}\\d_1a_{21}&d_2a_{22}&\cdots&d_na_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\d_1a_{n1}&d_2a_{n2}&\cdots&d_na_{nn}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{DA}=\begin{pmatrix}d_1a_{11}&d_1a_{12}&\cdots&d_1a_{1n}\\d_2a_{21}&d_2a_{22}&\cdots&d_2a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\d_na_{n1}&d_na_{n2}&\cdots&d_na_{nn}\end{pmatrix}$；

（2）提示：利用（1）的结论，并比较 $\boldsymbol{AD}$ 和 $\boldsymbol{DA}$ 的各元素。

6．提示:（1),（2),（3),（4）按定义直接验证;（5）$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T)$。

7．$a=0$。

8．提示：直接验证。

9．$\begin{pmatrix}3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\end{pmatrix}$。

10．$\boldsymbol{A}^n=\begin{cases}2^n\boldsymbol{I}, & n\text{为偶数},\\2^{n-1}\boldsymbol{A}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$

11．$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。

12．$\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$，$a$，$b$，$c$ 为任意常数。

13．提示：直接验证。

14．提示:（1）利用矩阵乘法的定义计算 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})$ 和 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$；（2）利用（1）的结

论。
15．提示：利用乘法分配律直接验证。
16．提示：参见例 1. 1. 15。

§2　行列式

1．（1）-7；（2）$-3(x^2-1)(x^2-4)$；（3）$b^2(b^2-4a^2)$；（4）$(1-a+a^2)(1-a^3)$。

2．3。

3．提示：原行列式可表为$\left|\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right|$。

4．1。
5．0。
6．$a^2(a-2^n)$。

7．$\dfrac{1}{2}$。
8．± 1。
9．提示：将一些列的适当倍数加到后面的列。

10．（1）a^n-a^{n-2}；（2）$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{n+1}{2}n^{n-1}$；（3）$1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$；

（4）$n+1$；（5）$(-2)^n\left(\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\left[\left(1-\dfrac{n}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)\right]$；

（6）$x_1(x_2-a_{12})(x_3-a_{23})\cdots(x_n-a_{n-1,n})$；（7）$(a^2-b^2)^n$。

11．1，-1，2，-2。

12．有 $n-1$ 个根：$x_1=0$，$x_2=1$，…，$x_{n-1}=n-2$。

13．提示：将各列加到第一列，再将第一行的（-1）倍数加到下面各行。
14．提示：将第一行的适当倍数加到下面各行。
15．提示：用数学归纳法。
16．提示：对下式取行列式：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \cdots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & & & \\ & \ddots & & \\ & & |\boldsymbol{A}| & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}。$$

17．提示：从第 i 行提取公因子 a_i^n（$i=1,2,\cdots,n+1$），再利用 Vandermonde 行列式的结论。

18．提示：从最后一行开始依次减去前面一行，并利用$C_n^k - C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^k$。之后按第一列展开，再重复前面的步骤。

19．-5。

20．$n!$。

§3　逆　阵

1.（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$；（2）$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$。

2．$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{A}|$中所有元素的代数余子式之和为1。

3．$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$。

4．$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$。

5．$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{6}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)$，$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})^{-1} = \frac{1}{6}\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{I})^{-1} = \frac{1}{6}(3\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$。

6．$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。

7．$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

8．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$。

9．提示：利用$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})^T = \boldsymbol{I}$。

10．提示：利用矩阵运算规则直接验证。

11．提示：利用$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$。

12. $-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$。

13. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$。

14. -1。

15. 提示：（1）$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}_n - (2-\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$；（2）用反证法及（1）的结论。

16. $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^T$。

17. 提示：题目的假设就是 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$。

18.（1）提示：利用例 1. 3. 15（2）的方法；

（2）$|\boldsymbol{A}| = (-1)^n n!(1-n)$；

（3）$(-1)^n\left[(1-n)\left(1-\sum_{i=1}^n a_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right]$。

19. $x_1 = 0$，$x_2 = 2$，$x_3 = 0$，$x_4 = 0$。

20. $b = \dfrac{(a+1)^2}{4}$。

21. 提示：方程组的系数行列式为$(a^2-b^2)^n$，其解为$x_i = \dfrac{1}{a+b}$（$i = 1, 2, \cdots, 2n$）。

线性方程组练习题

§1　向量的线性关系

1.（1）线性无关；（2）线性相关。

2. 当$a = 5$且$b = 12$时线性相关，其他情形线性无关。

3.（1）当$t = 5$时，线性相关；（2）$t \neq 5$时，线性无关；（3）能。$\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$。

4.（1）当$t = 0$或$t = -10$，线性相关；（2）当$t \neq 0$且$t \neq -10$时，线性无关。

5. $lm \neq 1$。

6. 当m为偶数时，线性相关；当m为奇数时，线性无关。

7. 能。

8.（1）能；（2）不能。

9. $k \neq 0$且$k \neq -3$。

10. 提示：略。

11. 提示：利用线性相关定义的线性表达式，再左乘$\boldsymbol{A}$。

12. 提示：按定义推知。

13. 提示：必要性由定义和 Cramer 法则导出。充分性通过$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n$可以被

$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，⋯，$\boldsymbol{a}_n$ 线性表示推出。

14．提示：对等式中的系数是否有为零进行讨论。

15．提示：充分性由 Cramer 法则导出；必要性利用第 13 题的结论。

16．提示：记 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，⋯，$\boldsymbol{a}_m$，$\boldsymbol{C}$ 的行向量为 $\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{c}_2$，⋯，$\boldsymbol{c}_m$，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 得 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{a}_i^T=\boldsymbol{c}_i^T$（$i=1,2,\cdots,m$）。若 $\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$，则可得

$$\lambda_1\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{a}_1^T+\lambda_2\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{a}_2^T+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{a}_m^T=\boldsymbol{0}，即 \lambda_1\boldsymbol{c}_1^T+\lambda_2\boldsymbol{c}_2^T+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{c}_m^T=\boldsymbol{0}。$$

由此得 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$。

17．提示：用数学归纳法。

18．提示：按定义写出线性组合为 $\boldsymbol{0}$ 的表达式，再左乘 $\boldsymbol{A}$，证明每个系数为 0。

19．提示：记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1，\boldsymbol{a}_2，\cdots，\boldsymbol{a}_n)$，则 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n\\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$。

§2　秩

1．（1）3；（2）2；（3）$a_n\neq0$ 时，秩为 n；$a_n=0$ 时，秩为 $n-1$。

2．3。

3．（1）线性相关；（2）线性无关。

4．秩为 4；$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_4$，$\boldsymbol{a}_5$ 是一个极大无关组。

5．当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ 线性相关。

当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{a}_1$ 是一个极大无关组，此时 $\boldsymbol{a}_2=2\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_3=3\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_4=4\boldsymbol{a}_1$。

当 $a=-10$ 时，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$ 是一个极大无关组，此时 $\boldsymbol{a}_1=-\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_4$。

6．提示：考虑极大无关组。

7．不等价。

8．$a=1$。

9．$a=b\neq\dfrac{1}{2}$。

10．提示：由 $(\boldsymbol{a}_1，\boldsymbol{a}_2，\cdots，\boldsymbol{a}_m)=(\boldsymbol{b}_1，\boldsymbol{b}_2，\cdots，\boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{D}$ 可得

$$m=\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1，\boldsymbol{a}_2，\cdots，\boldsymbol{a}_m)\leq\operatorname{rank}(\boldsymbol{b}_1，\boldsymbol{b}_2，\cdots，\boldsymbol{b}_m)。$$

11．提示：$n=\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\leq\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$，以及从 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})\leq n$。

12．提示：利用定理 2.2.5 的（6）。

13．提示：由 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$ 可推知 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{O}$。

14．提示：利用定理 2.2.5 的（4）和（6）。

15．1。

16．提示：（1）充分性易知。必要性：设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=n$。通过行初等变换，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，使得 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{B}_1$ 为 n 阶可逆矩阵。此时

$$\begin{pmatrix} I_n & \\ -B_2 & I_{m-n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1^{-1} & \\ & I_{m-n} \end{pmatrix} P_1 A = \begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix}。$$

（2）的证明类似。

17．提示：由定理 2.2.6，存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}(\boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}。$$

§3　线性方程组

1．（1）$c_1(1,-2,1,0,0)^T + c_2(1,-2,0,1,0)^T + c_3(5,-6,0,0,1)^T$，$c_1$，$c_2$，$c_3$ 是任意常数。

（2）$(1,2,-1,-2,0)^T + c_1(0,-20,14,-26,11)^T$，$c_1$ 是任意常数。

（3）无解。

2．当 $a=1$ 或 $b=1$ 时有非零解。

（1）当 $a=1$ 时，通解为：$b=1$ 时，$\boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；$b \neq 1$ 时，$\boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，

其中 c_1，c_2 为任意常数。

（2）当 $b=1$ 时，通解为：$a=1$ 时，$\boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；$a \neq 1$ 时，$\boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

其中 c_1，c_2 为任意常数。

3．$a=-2$。

4．通解：$\boldsymbol{x} = (2,1,0,0)^T + c_1(1,3,1,0)^T + c_2(1,0,0,-1)^T$；满足 $x_1^2 = x_2^2$ 的解：$\boldsymbol{x} = (1,1,0,1)^T + c_1(3,3,1,-2)^T$ 或 $\boldsymbol{x} = (-1,1,0,3)^T + c_2(-3,3,1,4)^T$（$c_1$，$c_2$ 为任意常数）。

5．当 $k \neq 9$ 时，通解为 $\boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}$（$c_1$，$c_2$ 为任意常数）。

当 $k=9$ 时，若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=2$，则通解为 $\boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$（$c_1$ 为任意常数）；若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=1$，则

通解为 $\boldsymbol{x} = c_1\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$（$c_1$，$c_2$ 为任意常数）。

6．（1）$a=0$ 或 $a=2$；

（2）$a=0$ 时通解为 $c(-2,1,0)^T$（c 为任意常数）；$a=2$ 时通解为 $c(1,-1,1)^T$（c 为任意常数）。

7．（1）当$\lambda\neq-2$且$\lambda\neq1$时，方程组有唯一解。
（2）当$\lambda=-2$时，方程组无解。
（3）当$\lambda=1$时，方程组有无穷多解。通解为

$$\boldsymbol{x}=(-2,0,0)^T+c_1(-1,1,0)^T+c_2(-1,0,1)^T，\ c_1，\ c_2\text{为任意常数。}$$

8．（1）当$a\neq1$时（b可为任意常数），方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b-a+2}{a-1}，\quad x_2=\frac{a-2b-3}{a-1}，\quad x_3=\frac{b+1}{a-1}，\quad x_4=0\text{。}$$

（2）当$a=1$，$b=-1$时，方程组有无穷多解。通解为

$$\boldsymbol{x}=(-1,1,0,0)^T+c_1(1,-2,1,0)^T+c_2(1,-2,0,1)^T，\ c_1，\ c_2\text{为任意常数。}$$

（3）当$a=1$，$b\neq-1$时，方程组无解。
9．$\boldsymbol{x}=\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)^T+c_1(1,2,1)^T$（$c_1$为任意常数）。
10．（1）略；
（2）$\lambda=2$，$\mu=-3$；通解：$\boldsymbol{x}=(2,-3,0,0)^T+c_1(-2,1,1,0)^T+c_2(4,-5,0,1)^T$（$c_1$，$c_2$为任意常数）。
11．（1）当$a\neq0$时有唯一解$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，且$x_1=\dfrac{n}{(n+1)a}$；
（2）当$a=0$时有无穷多解，通解为$\boldsymbol{x}=(0,1,\cdots,0)^T+c(1,0,\cdots,0)^T$（$c$是任意常数）。
12．（1）$b\neq2$时，$\boldsymbol{b}$不能由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$线性表示；
（2）$b=2$时，$\boldsymbol{b}$能由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$线性表示。此时，当$a\neq1$时，$\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$；当$a=1$时，$\boldsymbol{b}=-(2c+1)\boldsymbol{a}_1+(c+2)\boldsymbol{a}_2+c\boldsymbol{a}_3$（$c$为任意常数）。
13．（1）当$\alpha\neq1$时（β可为任意常数），$\boldsymbol{b}$能由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$唯一线性表示；
（2）当$\alpha=1$，$\beta\neq-1$时，$\boldsymbol{b}$不能由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$线性表示；
（3）当$\alpha=1$，$\beta=-1$时，$\boldsymbol{b}$能由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$线性表示，但表达式不唯一。其一般表示为$\boldsymbol{b}=(-1+c_1+c_2)\boldsymbol{a}_1+(1-2c_1-2c_2)\boldsymbol{a}_2+c_1\boldsymbol{a}_3+c_2\boldsymbol{a}_4$（$c_1$，$c_2$为任意常数）。
14．（1）（I）的基础解系$(0,0,1,0)^T$，$(-1,1,0,1)^T$；（II）的基础解系$(0,1,1,0)^T$，$(-1,-1,0,1)^T$；
（2）$c(-1,1,2,1)^T$（c为任意常数）。
15．（1）$a=1$或$a=2$；
（2）当$a=1$时，公共解为$c(-1,0,1)^T$（c为任意常数）；当$a=2$时，公共解为$(0,1,-1)^T$。
16．（1）$\boldsymbol{x}=c_1(5,-3,1,0)^T+c_2(-3,2,0,1)^T$（$c_1$，$c_2$为任意常数）；
（2）$\alpha=-1$时有非零公共解。全部公共解为$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2$（$c_1$，$c_2$为任意常数）。
17．（1）$\boldsymbol{x}=(-2,-4,-5,0)^T+c_1(1,1,2,1)^T$（$c_1$为任意常数）；
（2）$m=2$，$n=4$，$t=6$。
18．（1）提示：利用 Vandermonde 行列式的结论。
（2）通解：$\boldsymbol{x}=(0,k^2,0)^T+c_1(-k^2,0,1)^T$（$c_1$为任意常数）。

19．提示：利用行列式的性质$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij} \cdot |\boldsymbol{A}|$。

20．提示：充分性：由$\boldsymbol{A}$的行向量组与$\boldsymbol{B}$的行向量组等价可推出存在矩阵$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{DA}$。必要性：此时$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解，由此可得到$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{B}$的行向量组可以被$\boldsymbol{A}$的行向量组线性表示。同样方法可证明$\boldsymbol{A}$的行向量组可以被$\boldsymbol{B}$的行向量组线性表示。

21．提示：$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix} \le \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) < n$。

22．提示：说明$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的$m$个线性无关的解。

23．提示：验证$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，从而说明$\boldsymbol{A}$不可逆。

线性空间与线性变换练习题

§1 线性空间

1．是线性空间；维数为 1，$(1,1,\cdots,1)^T$是一个基。

2．是线性空间；维数为 3；$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}$是一个基。

3．$\dim V_1=\frac{1}{2}n(n+1)$，$\dim V_2=\frac{1}{2}n(n-1)$。

4．$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$是一个基，维数为 3。

5．（1）$k=1$时，$\dim N(\boldsymbol{A})=2$，$\xi_1=(1,-1,1,0)^T$，$\xi_2=(0,-1,0,1)^T$是一个基；

$k\ne 1$时，$\dim N(\boldsymbol{A})=1$，$\xi_1=(-1,0,-1,1)^T$是一个基。

（2）$k=1$时，$\dim N(\boldsymbol{A}^T)=1$，$\xi_1=(-1,1,1)^T$是一个基；

$k\ne 1$时，$\dim N(\boldsymbol{A}^T)=0$，无基。

（3）$k=1$时，$\dim \operatorname{Span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\}=2$，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$是一个基；

$k\ne 1$时，$\dim \operatorname{Span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\}=3$，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$是一个基。

6．（1）$(2,-1,1)^T$；（2）$\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$；（3）$(4,-2,0)^T$；（4）$(3,-2,1)^T$。

7．（1）$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$；（2）$(1,3,3)^T$；（3）$c(3,2,-3)^T$（$c$是任意常数）。

8．（1）提示：将$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$与$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$的关系用矩阵表示，该矩阵可逆；

（2）$(-3,2,2)^T$。

9．提示：若 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$（$a_n\neq 0$），则

$$(P(x),P'(x),\cdots,P^{(n)}(x))=(1,x,\cdots,x^n)\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 2!a_2 & \cdots & n!a_n \\ a_1 & 2a_2 & 6a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & na_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}。$$

10．（1）提示：从定义验证，并在等式中取 $x=a_i$（$i=1,2,\cdots,n$）；

（2）$\begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$。

§2　线性变换及其矩阵表示

1．（1）不是；（2）是；（3）是。

2．（1）$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；（2）$\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{pmatrix}$；（3）$\dim N(A)=1$，$\dim A(\mathbf{R}^3)=2$。

3．（1）$3\boldsymbol{a}_1+8\boldsymbol{a}_2+5\boldsymbol{a}_3+5\boldsymbol{a}_4$；

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$。

4．$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

5．（1）$\begin{pmatrix} -2 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$；

（2）$A(\boldsymbol{b}_1)=(3,2,-7)^T$，$A(\boldsymbol{b}_2)=(-12,-5,22)^T$，$A(\boldsymbol{b}_3)=(-9,-3,15)^T$；

（3）$(6,-2,0)^T$；

（4）$(-7,-5,17)^T$；

（5）$(4k-8,2-2k,18-9k)^T$（k 是任意常数）。

6．（1）$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；（2）$\left(\dfrac{3}{5},2,-\dfrac{4}{5}\right)^T$；

（3） $A^{-1}(\boldsymbol{x})=(2x_1-3x_3, -x_2, x_1+x_2+2x_3)^T$ 。

7．提示：用反证法。从$\sigma(\boldsymbol{x})=\sigma(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$推出$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。

8．提示：按定义写出线性组合表达式，再作用σ。

9．提示：设$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n$，则$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$是齐次线性方程$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的非零解。

10．（1） $A^2=0$；（2） $A^{-1}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$；（3）按定义直接验证。

11．提示：按定义直接验证。

12．提示：说明σ在基$\boldsymbol{B}_{11}$，$\boldsymbol{B}_{12}$，$\boldsymbol{B}_{21}$，$\boldsymbol{B}_{22}$下的表示矩阵可逆。

σ^{-1} ： $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b-a & a \\ c & d-c \end{pmatrix}$。

13．提示：σ的表示矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^n+a_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{A}+a_n\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{O}$。

14．（1）提示：从定义出发，在线性组合为零的表达式上作用σ的适当次幂。

（2） $\xi, \sigma(\xi), \cdots, \sigma^{n-1}(\xi)$就是所求的基。

特征值与特征向量练习题

§1　特征值与特征向量

1．（1）特征值为 1（二重）和 2。对应于特征值 1 的特征向量为$c(1, 0, 0)^T$，对应于特征值 2 的特征向量为$c(1, 2, 1)^T$，其中c是不为零的任意常数；

（2）特征值为 1（二重）和-2。对应于特征值 1 的特征向量为$c_1(-1, 1, 0)^T+c_2(-1, 0, 1)^T$，其中$c_1$，$c_2$是不全为零的任意常数。对应于特征值 2 的特征向量为$c(1, 1, 1)^T$，其中c是不为零的任意常数。

2．$1+(n-1)a$，$1-a$（$n-1$重）。

3．-4。

4．（1） $|\boldsymbol{A}|=-6$；

（2） $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值为 1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$。$\boldsymbol{A}^*$的特征值为-6，3，-2。

（3） $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$的特征值为 4，1，16。

5．$(-1)^n$。

6．提示：证明$2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$的特征值不为零。

7．$2\sqrt{2}$。

8．$a=2$，$b=4$。

9．$a+b=0$。

10．$a=-3$，$b=1$，ξ对应的特征值为 5。

11．$a=0$，$b=-2$，$c=-2$，$\lambda_0=1$或$a=-\dfrac{9}{2}$，$b=10$，$c=-5$，$\lambda_0=-\dfrac{1}{2}$。

12．$a=0$，$A=\begin{pmatrix}-5 & 4 & -6\\ 3 & -3 & 3\\ 7 & -6 & 8\end{pmatrix}$。

13．$a=2$，$b=-2$，$\lambda=4$或$a=2$，$b=1$，$\lambda=1$。

14．2，-2，1，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，-1。

15．（1）提示：按定义直接验证；（2）$\boldsymbol{A}^{-1}$的各行元素之和为$\dfrac{1}{a}$，$2\boldsymbol{A}^{-1}-3\boldsymbol{A}$的各行元素之和为$\dfrac{2}{a}-3a$。

16．提示：（1）$\boldsymbol{A}$的特征值满足$\lambda^2-1=0$；（2）由已知得$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$且$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|\neq 0$。

17．$\lambda^2(\lambda-1)\left(\lambda-\sum\limits_{i=1}^{4}a_{ii}+1\right)$。

18．提示：参考例 4. 1. 15 的方法。

19．提示：$\lambda_1^{\ 2},\lambda_2^{\ 2},\cdots,\lambda_n^{\ 2}$是$\boldsymbol{A}^2$的特征值，因此$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2)=\lambda_1^{\ 2}+\lambda_2^{\ 2}+\cdots+\lambda_n^{\ 2}$，且直接计算知$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}$。

20．提示：先证明$\boldsymbol{A}$只有一个n重特征值k，再证明$(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{O}$。

21．提示：（1）当$\lambda\neq 0$，利用块初等变换

$$\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n-\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA}\end{pmatrix}。$$

（2）提示：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，其中$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$，并利用（1）的结论。答案：0（$n-2$重），$n$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$。

21．提示：应用 Hamilton-Cayley 定理。

§2 方阵的相似化简

1.（1）能与对角矩阵相似，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&0&0\\0&4&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$（$\boldsymbol{P}$ 的答案不唯一，下同）；

（2） 不能与对角矩阵相似。

2.（1）都有特征值 1（二重），5。

（2） $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_3$ 相似， $\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_3$ 都不相似。

3． $x=0$， $y=-2$。

4． $\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&5&-2\\-2&4&-1\end{pmatrix}$。

5.（1） $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$；（2） $\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}$。

6.（1） $a=-3$， $b=0$， $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值为 -1；（2）不能对角化。

7.（1） $k=0$；（2）不能对角化。

8.（1） $a=2$， $b=-2$；

（2） $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$。

9．4。

10． $a=0$， $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$。

11． $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似， $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$。

12． $\begin{pmatrix}1&2^{101}-2&0\\0&2^{100}&0\\0&\frac{5}{3}(1-2^{100})&1\end{pmatrix}$。

13． $x_n=\dfrac{1}{2(p+q)}[2q-(q-p)(1-p-q)^n]$，

$y_n=\dfrac{1}{2(p+q)}[2p+(q-p)(1-p-q)^n]$， $n=0,1,\cdots$。

14． 提示： $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}$。

15． 提示：由假设可知 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=\boldsymbol{O}$，并用例 4. 2. 14 的方法。

16．提示：若 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{CP}_2=\boldsymbol{D}$，取 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \\ & \boldsymbol{P}_2\end{pmatrix}$。

17．提示：利用 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|\cdot|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I}|$，再说明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值互不相同。

18．提示：（1）从 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 及 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 可知 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解；（2）若 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$ 成立，由 $\boldsymbol{Aa}_1=-\boldsymbol{a}_1$ 可得 $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{BAa}_1=-\boldsymbol{Ba}_1$，于是 $\boldsymbol{a}_1$ 是 $\boldsymbol{B}$ 对应于特征值 0 的特征向量。

Euclid空间与酉空间练习题

§1　内积

1.（1）$\arccos\dfrac{7\sqrt{2}}{18}$；（2）$c_1(-12,1,7,0)^T+c_2(-5,8,0,7)^T$（$c_1$，$c_2$ 为任意常数）。

2. $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)^T$，$\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)^T$，$\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)^T$。

3. $\dfrac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^T$，$\dfrac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^T$。

4.（1）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)^T$，$\dfrac{1}{\sqrt{10}}(1,-2,-1,-2)^T$；

（2）$c_1(1,1,-1,0)^T+c_2(0,1,0,-1)^T$（$c_1$，$c_2$ 为任意常数）。

5. $a=\dfrac{2}{7}$，$b=c=d=-\dfrac{6}{7}$。

6．提示：按定义直接验证。

7．提示：$|\boldsymbol{A}|^2=1$，再考虑 $|\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^T\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\boldsymbol{B}^T|$。

8．提示：$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^T(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})=\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I}$。

9．当 $|\boldsymbol{A}|=1$ 时 $a_{ij}=A_{ij}$；当 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 时 $a_{ij}=-A_{ij}$（$i,\ j=1,2,\cdots,n$）。

10．提示：直接验证 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n$。

11．提示：利用 $(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x})$ 验证 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积为 0。

12．提示：由假设可知 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$，再利用矩阵运算的性质直接验证 $\left[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\right]^T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{I}$。

13．提示：$\mathcal{A}$ 在标准正交基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ 下的表示矩阵是正交矩阵。

14．$\mathcal{A}$ 是在基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 下的具有表示矩阵 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 的线性变换。

15．$c(\mathrm{i},0,1)^T$，其中 $|c|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

16．提示：直接验证。

§2 正交相似和酉相似

1．（1）$\boldsymbol{S}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 0 & \\ & & -3\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-4 & & & \\ & -4 & & \\ & & -4 & \\ & & & 8\end{pmatrix}$。

2．（1）$a=3$，其它特征值为 2 和 5；（2）$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

3．与对角阵相似，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}(2+k)^2 & & \\ & (2+k)^2 & \\ & & k^2\end{pmatrix}$。

4．（1）$a=b=0$；（2）$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$。

5．$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$。

6．（1）另一个特征值为 0，对应的特征向量为$k(-1,1,1)^T$（k 为任意非零常数）；

（2）$\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & -2\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$。

7．（1）特征值为 0（二重）和 3。对应于特征值 0 的特征向量为$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$（$k_1$，$k_2$ 为不全为零的常数）；对应于特征值 3 的特征向量为$k(1,1,1)^T$（k 为任意非零常数）；

（2）$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$。

8.（1）$x=3$；（2）$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{AS})^T(\boldsymbol{AS})=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 9\end{pmatrix}$。

9.（1）$a=-2$；（2）$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$。

10. $\begin{pmatrix}-\boldsymbol{I}_{n-2} & \\ & \boldsymbol{I}_2\end{pmatrix}$。

11. 提示：$\boldsymbol{A}$ 正交相似于对角阵。

12. 提示：$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相似于相同的对角阵，因此 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 相似。

13. 提示：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于1，-1的特征向量。又$|\boldsymbol{A}|=0$，所以0是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

14. $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$。

15. 提示：$\|\boldsymbol{Ax}\|^2=(\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ax})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{Ax})$，$\|\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{x}\|^2=(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{AA}^H\boldsymbol{x})$。

16. $\prod_{i=1}^{n}(a\lambda_i^2+b\lambda_i+c)$。

二次型练习题

§1 二次型及其标准形式

1. $9y_1^2$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}}\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$。

2. $2y_1^2+3y_2^2+\frac{2}{3}y_3^2$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & -1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$。

3. $t=\frac{7}{8}$。

4. $a=2$。

5.（1）$a=1$，$b=2$；

（2）$2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$。

6.（1）$a=3$，$b=7$；

（2）$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$。

7. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$。

8. $t>5$。

9.（1）$a=b=-3$；（2）单叶双曲面，标准方程为$-5y_1^2+6y_2^2+6y_3^2=1$。

10. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$。

11. 提示：$\boldsymbol{A}$有正的特征值。

12. 将f约化为规范形考虑。

13. 提示：考虑经正交变换后的f的标准形。

14. 提示：$r+(p-q)=2p$，$r=p+q$。

15. 提示：$\boldsymbol{A}$的只有特征值 0。

16. $y_1^2+\cdots+y_r^2-2y_{r+1}^2-\cdots-2y_n^2$。

17. 提示：（1）$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^T\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}$；（2）相同，因为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$，

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 合同。

18. $f(2,-2,1)=4$ 为最大值； $f(1,2,2)=-2$ 为最小值。

§2 正定二次型

1.（1）正定；（2）负定；（3）既不正定，也不负定。

2. $\lambda>\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$。

3. $-\dfrac{4}{5}<\lambda<0$。

4. $a=3$。

5. 提示：说明 $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{I}_n$ 的特征值均大于 λ。

6.（1）$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}(k+2)^2 & 0 & 0\\ 0 & (k+2)^2 & 0\\ 0 & 0 & k^2\end{pmatrix}$；（2）$k\neq 0$ 且 $k\neq -2$。

7. 提示：说明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大 0。

8.（1）提示：说明 $\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k$ 的特征值均大 0；（2）$(1+k)^r$。

9. 正定。

10. 标准形：$\dfrac{1}{2}(n+1)y_1^2+\dfrac{1}{2}y_2^2+\cdots+\dfrac{1}{2}y_n^2$（后面 $n-1$ 个系数均为 $\dfrac{1}{2}$）。正定。

11.（1）-2，-2，0；（2）$k>2$。

12. 提示：记 k 为 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值的绝对值的最大者，当 t 满足 $1+tk>0$ 即可。

13. 提示：按定义验证。

14. 提示：方法见例 6. 2. 13。

15. 提示：证明二次型 $x^2+y^2+z^2-2xy\cos\alpha-2xz\cos\beta-2yz\cos\gamma$ 半正定。

16. 提示：按定义验证。

17. 提示：按定义证明。写出线性组合的表达式后，再分别左乘 $\boldsymbol{a}_j^T\boldsymbol{A}$（$j=1,2,\cdots,n$）。

18. 提示：由于存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$，即 $b_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ki}p_{kj}$（$i,j=1,2,\cdots,n$），所以

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}x_ix_j=\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(p_{ki}x_i)(p_{kj}x_j)\right]=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{y}_k^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k,$$

其中 $\boldsymbol{y}_k=(p_{k1}x_1,\,p_{k2}x_2,\cdots,p_{kn}x_n)^T$（$k=1,2,\cdots,n$）。

19.（1）$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$；

（2）提示：由（1）知 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$ 是正定矩阵。取 $\boldsymbol{x}$ 为 m 维零向量（列向

量），$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ 为 n 维列向量，则

$$(\boldsymbol{x}^T, \quad \boldsymbol{y}^T)\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} > 0 \text{。}$$

由此可知 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} > 0$。

20．提示：利用例 6. 2. 16 的方法和结论。