特征值与特征向量练习题

§1　特征值与特征向量

1．求下列矩阵的特征值及对应的特征向量：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$。

2．求n阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$的特征值（$a \neq 0$）。

3．已知 12 是矩阵$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & a & 4 \end{pmatrix}$的特征值，求$a$。

4．已知 3 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值为 1，-2，3。

（1）求$|\boldsymbol{A}|$；

（2）求$\boldsymbol{A}^{-1}$和$\boldsymbol{A}^{*}$的特征值；

（3）求$\boldsymbol{A}^{2}+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$的特征值。

5．已知n阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{k}=\boldsymbol{O}$，求$|\boldsymbol{A}|$。

6．已知方阵$\boldsymbol{A}$满足$2\boldsymbol{A}^{2}-3\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}=0$，证明$2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$可逆。

7．设 4 阶方阵$\boldsymbol{A}$满足$|\sqrt{2}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}=2\boldsymbol{I}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，求$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^{*}$的一个特征值。

8．设矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & b & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$的特征值为 1，2，3，求$a$，$b$。

9．已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，问$a$与$b$应满足何种关系？

10．已知$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&b&a\\1&a&3\end{pmatrix}$的一个特征向量，求$a$，$b$和$\boldsymbol{\xi}$对应的特征值。

11．已知$\lambda=-2$是$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&a\\b&2&-2\end{pmatrix}$的特征值，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\c\\-2\end{pmatrix}$是$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值$\lambda_0$对应的特征向量，求$a$，$b$，$c$，$\lambda_0$的值。

12．设3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为-1，0，1，与之对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,a+3,a+2)^T，\boldsymbol{\alpha}_2=(a-2,-1,a+1)^T，\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2a,-1)^T。$$

若还有$\begin{vmatrix}a&-5&8\\0&a+1&8\\0&3a+3&25\end{vmatrix}=0$，求$a$与$\boldsymbol{A}$。

13．设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$是可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}=(1,b,1)^T$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$的特征向量，且$\lambda$是$\boldsymbol{\alpha}$对应的特征值，求$a$，$b$，$\lambda$。

14．已知3阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为1，-1，2，求矩阵$\begin{pmatrix}2\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\end{pmatrix}$的特征值。

15．设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，且每行元素之和均为a。证明：

（1）$\lambda=a$是$\boldsymbol{A}$的特征值，$(1,1,\cdots,1)^T$是对应的特征向量；

（2）当$\boldsymbol{A}$可逆且$a\neq0$时，分别求$\boldsymbol{A}^{-1}$和$2\boldsymbol{A}^{-1}-3\boldsymbol{A}$的各行元素之和。

16．设$\boldsymbol{A}$是**对合矩阵**，即满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$的方阵。证明：

（1）$\boldsymbol{A}$的特征值只能是1或-1；

（2）若$\boldsymbol{A}$的特征值全为1，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$。

17．已知4阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$有二重特征值0，且1是$\boldsymbol{A}$的单重特征值，求$\boldsymbol{A}$的特征多项式$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|$。

18．设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是n阶方阵。证明：若$\boldsymbol{A}$的每行元素的绝对值之和小于1，则$\boldsymbol{A}$的特征值的模小于1。

19．设n阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\ 2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}\text{。}$$

20．设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵。证明：若每个非零 n 维列向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵，即 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{I}_n$（$k$ 是数）。

21．（1）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，且 $m\geq n$。证明：

$$|\lambda\boldsymbol{I}_m-\boldsymbol{AB}|=\lambda^{m-n}|\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{BA}|;$$

（2）设 a_i（$i=1,2,\cdots,n$，$n\geq 3$）为实数，满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2+1 \end{pmatrix}$$

的特征值。

21．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & b & -c \\ -b & 0 & a \\ c & -a & 0 \end{pmatrix}$，证明 $\boldsymbol{A}^3+(a^2+b^2+c^2)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。

§2 方阵的相似化简

1. 判断下列矩阵是否能与对角矩阵相似。若相似，求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵：

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

2．设

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\text{。}$$

（1）　说明 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 和 $\boldsymbol{A}_3$ 有相同特征值；

（2）　判别 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 和 $\boldsymbol{A}_3$ 之间的相似关系。

3．设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ 相似，求 x，y。

4．已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1，1，3，与之相对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{a}_1=(2,1,0)^T,\quad \boldsymbol{a}_2=(-1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{a}_3=(0,1,1)^T,$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$。

5．已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1，2，3，与之相对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{a}_1=(1,1,1)^T，\quad \boldsymbol{a}_2=(1,2,4)^T，\quad \boldsymbol{a}_3=(1,3,9)^T。$$

设 $\boldsymbol{b}=(1,1,3)^T$。

（1） 将 $\boldsymbol{b}$ 用 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 线性表示；

（2） 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}$（$n\ge 1$）。

6．已知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的特征向量。

（1）求 a，b 及 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值；

（2）问 $\boldsymbol{A}$ 是否能对角化？

7．已知 0 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&k+1&-2\\-k&2&k\\4&1&-2\end{pmatrix}$ 的特征值。

（1）求 k 的值；（2）问 $\boldsymbol{A}$ 能否对角化？

8．已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量，且 $\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值。

（1） 求 a，b 的值；

（2） 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵。

9．设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$。若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，求 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$。

10．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，求常数 a，并找出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$。

11．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{pmatrix}$，试判断 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似，若相似，求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$。

12．设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-1&-1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{100}$。

13．设 $0<p,q<1$，$x_0=0.5$，$y_0=0.5$。数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-p)x_n+qy_n,\\ y_{n+1}=px_n+(1-q)y_n,\end{cases}\qquad n=0,1,\cdots。$$

求数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的通项公式。

14．设 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似。

15．已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，证明： $\boldsymbol{A}$ 可对角化。

16. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶矩阵。证明：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似，则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \\ & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 相似。

17. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 各有 n 个不同特征值。记 $f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式。证明：若 $f(\boldsymbol{B})$ 可逆，则

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

相似于对角矩阵，其中 $\boldsymbol{O}$ 为 n 阶零矩阵。

18. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$ 至少有一个成立。证明：（1） $\lambda=-1$ 必是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的特征值；
（2）若 $\boldsymbol{a}_1$， $\boldsymbol{a}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 对应于 -1 的特征向量，则 $\boldsymbol{a}_1$， $\boldsymbol{a}_2$ 线性无关。