线性方程组练习题

§1　向量的线性关系

1．判断下列向量组是否线性无关：

（1）$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix}4\\1\\10\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\5\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\0\\7\end{pmatrix}$。

2．讨论下面向量组的线性相关性：

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\\5\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\\4\\b\\-1\end{pmatrix}。$$

3．设$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix}$。

（1）问当t为何值时，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性相关？

（2）问当t为何值时，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性无关？

（3）当$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性相关时，问$\boldsymbol{a}_3$是否可以由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$线性表示？若能，写出具体表达式。

4．设有向量组

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1+t\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\2+t\\2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\3+t\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4+t\end{pmatrix}。$$

问：（1）当t为何值时，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$线性相关？

（2）当t为何值时，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$线性无关？

5．设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性无关，问当参数$l$，$m$满足何种关系时，$l\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1$，$m\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_3$也线性无关？

6．设$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m$线性无关，作

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2，\ \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3，\ \cdots，\ \boldsymbol{b}_{m-1}=\boldsymbol{a}_{m-1}+\boldsymbol{a}_m，\ \boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{a}_1。$$

判别$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，…，$\boldsymbol{b}_m$的线性相关性。

7．设$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$线性无关，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}$线性相关，问$\boldsymbol{b}$能否由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$线性表示？

8．设$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$线性相关，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$线性无关。问：

（1）$\boldsymbol{a}_1$能否由$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$线性表示；

（2）$\boldsymbol{a}_4$能否由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$线性表示。

9．若$\boldsymbol{b}=(0,k,k^2)^T$能由$\boldsymbol{a}_1=(1+k,1,1)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(1,1+k,1)^T$，$\boldsymbol{a}_3=(1,1,1+k)^T$唯一

地线性表示，求 k。

10．已知两个 n 维向量组 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m$ 和 $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，…，$\boldsymbol{b}_m$。证明：若存在两组不全为零的数 λ_1，λ_2，…，λ_m 和 μ_1，μ_2，…，μ_m 使得

$$(\lambda_1+\mu_1)\boldsymbol{a}_1+(\lambda_2+\mu_2)\boldsymbol{a}_2+\cdots+(\lambda_m+\mu_m)\,\boldsymbol{a}_m$$
$$+(\lambda_1-\mu_1)\boldsymbol{b}_1+(\lambda_2-\mu_2)\boldsymbol{b}_2+\cdots+(\lambda_m-\mu_m)\,\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{0},$$

则 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m+\boldsymbol{b}_m$, $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{b}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m-\boldsymbol{b}_m$ 线性相关。

11．设 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$,…，$\boldsymbol{a}_m$ 是 n 维向量组，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵。证明：若 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$,…，$\boldsymbol{a}_m$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2$,…，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_m$ 也线性相关。

12．已知向量 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m$ 线性表示，但不能被 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_{m-1}$ 线性表示。证明：$\boldsymbol{a}_m$ 不能被 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_{m-1}$ 线性表示，但能被 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_{m-1}, \boldsymbol{b}$ 线性表示。

13．设 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 是 n 个 n 维向量，证明：$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 线性无关的充分必要条件是任何 n 维向量都可以被它们线性表示。

14．设有向量组 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$,…，$\boldsymbol{a}_m$，其中任意 $m-1$ 个向量都线性无关。证明：等式

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

中的系数 x_1，x_2,…，x_m 或者全为零，或者全不为 0。

15．证明：线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

对于任何 b_1，b_2，…，b_n 都有解的充分必要条件是其系数行列式不等于 0。

16．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times p$ 矩阵。若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量线性无关，证明 $\boldsymbol{A}$ 的行向量也线性无关。

17．设 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m$ 都是非零向量。证明：若每个 $\boldsymbol{a}_j$（$1<j\le m$）都不能由 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_{j-1}$ 线性表示，则 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_m$ 线性无关。

18．设 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_r$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的 r 个线性无关的解。而向量 $\boldsymbol{b}$ 不是该方程的解，即 $\boldsymbol{Ab}\neq\boldsymbol{0}$。证明：向量组 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}_r$ 线性无关。

19．证明：n 个 n 维列向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 线性无关的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^T\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2^T\boldsymbol{a}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n^T\boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}\neq 0。$$

§2　秩

1．求下列矩阵的秩：

（1）$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}2 & 1 & 11 & 2\\ 1 & 0 & 4 & -1\\ 11 & 4 & 56 & 5\\ 2 & -1 & 5 & -6\end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix}0 & & & & a_n\\ -1 & 0 & & & a_{n-1}\\ & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & -1 & 0 & a_2\\ & & & -1 & a_1\end{pmatrix}$。

2．设矩阵$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 0 & t & 0\\ 0 & -4 & 5 & -2\end{pmatrix}$的秩为 2，求$t$。

3．判定下述向量组是否线性相关：

（1）$\begin{pmatrix}3\\-4\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}4\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$；　　（2）$\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}$。

4．求向量组

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\-3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_5=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$$

的秩与一个极大无关组。

5．设有向量组：

$\boldsymbol{a}_1=(1+a,1,1,1)^T$，　$\boldsymbol{a}_2=(2,2+a,2,2)^T$，　$\boldsymbol{a}_3=(3,3,3+a,3)^T$，

$\boldsymbol{a}_4=(4,4,4,4+a)^T$。

问a为何值时，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$线性相关？当$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$线性相关时，求其一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示。

6．证明：若向量组S_1能由向量组S_2线性表示，且$\mathrm{rank}(S_1)=\mathrm{rank}(S_2)$，则$S_1$与$S_2$等价。

7．设有两个向量组（I）：$\boldsymbol{a}_1=(1,0,1,-1)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(1,1,-2,0)^T$，$\boldsymbol{a}_3=(-1,-3,8,-2)^T$；

（II）：$\boldsymbol{b}_1=(1,1,-1,0)^T$，$\boldsymbol{b}_2=(0,1,0,1)^T$，$\boldsymbol{b}_3=(2,1,-2,-1)^T$。

问它们是否等价？

8．设有两个向量组$\boldsymbol{a}_1=(1,1,a)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(1,a,1)^T$，$\boldsymbol{a}_3=(a,1,1)^T$和$\boldsymbol{b}_1=(1,1,a)^T$，$\boldsymbol{b}_2=(-2,a,4)^T$，$\boldsymbol{b}_3=(-2,a,a)^T$。问：当$a$为何值时$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$可以由$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$线性表示，但$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$不能由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$线性表示？

9．设有两个向量组（I）：$\boldsymbol{a}_1=(1,1,0,0)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(0,1,1,0)^T$，$\boldsymbol{a}_3=(0,0,1,1)^T$；

（II）：$\boldsymbol{b}_1=(1,a,b,1)^T$，$\boldsymbol{b}_2=(2,1,1,2)^T$，$\boldsymbol{b}_3=(0,1,2,1)^T$。

问当a，b为何值时它们会等价？

10．设有两个n维向量组（I）$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$和（II）$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$（$m\le n$），证明：若（I）可以由（II）线性表示，且$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$线性无关，则$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$也线性无关。

11．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为n阶方阵，满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$，且$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$可逆。证明

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})。$$

12．设 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{A}_m$ 为 m 个 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m = \boldsymbol{O}$。试证：

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_1) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_m) \le (m-1)n。$$

13．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{ABA} = \boldsymbol{B}^{-1}$。证明：$\operatorname{rank}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{AB}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{AB}) \le n$。

14．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵，证明：

（1）若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$，则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$；

（2）若 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = n$，则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$。

15. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$，3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{O}$，求 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$。

16．设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，证明：（1）$\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$。

（2）$\boldsymbol{A}$ 是行满秩矩阵的充分必要条件是存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}$。

17．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$。证明：存在 $m\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $r\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$，满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{C}) = r$，使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$。

§3　线性方程组

1．求下列线性方程组的通解：

（1）$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = -7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -9, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 4; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$

2．问 a，b 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，此时并求出其解。

3．若已知线性方程组$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$有无穷多解，求$a$。

4．求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

的通解，并求出满足$x_1^2 = x_2^2$的全部解。

5．已知三阶方阵$\boldsymbol{A}$的第一行是(a, b, c)，且$a \neq 0$，矩阵$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$（$k$为常数）满足$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$。求线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的通解。

6．设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+2 & a+1 \\ -1 & a-2 & 2a-3 \end{pmatrix}$。若存在 3 阶非零矩阵$\boldsymbol{B}$，使得$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，

（1）求a的值；

（2）求线性方程组$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$的通解。

7．问λ为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2, \\ x + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

有唯一解、有无穷多解、无解？在方程组有无穷多解时，求出解。

8．问a，b为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解、有无穷多解、无解？在方程组有解时，求出解。

9．设$\boldsymbol{\alpha} = (1, 2, 1)^T$，$\boldsymbol{\beta} = (1, 1/2, 0)^T$，$\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 8)^T$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$，求解方程$2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}$。

10．已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ \lambda x_1 + x_2 + 3x_3 + \mu x_4 = 1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解。

（1）证明该方程组的系数矩阵的秩为 2；

（2）求λ，μ的值及该方程组的通解。

11．设有n元线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}，\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}。$$

问：（1）a为何值时，该方程组有唯一解$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，并求出$x_1$；

（2）a为何值时，该方程组有无穷多解，并求出通解。

12．设

$$\boldsymbol{a}_1=(1,4,0,2)^T，\boldsymbol{a}_2=(2,7,1,3)^T，\boldsymbol{a}_3=(0,1,-1,a)^T，\boldsymbol{b}=(3,10,b,4)^T。$$

问a，b为何值时，（1）$\boldsymbol{b}$不能由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$线性表示？

（2）$\boldsymbol{b}$能由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$线性表示？并写出表达式。

13．设

$$\boldsymbol{a}_1=(1,0,0,3)^T，\boldsymbol{a}_2=(1,1,-1,2)^T，\boldsymbol{a}_3=(1,2,\alpha-3,1)^T，$$
$$\boldsymbol{a}_4=(1,2,-2,\alpha)^T，\boldsymbol{b}=(0,1,\beta,-1)^T。$$

讨论α，β为何值时，（1）$\boldsymbol{b}$能由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$线性表示，且表达式唯一；

（2）$\boldsymbol{b}$不能由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$线性表示；

（3）$\boldsymbol{b}$能由$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$线性表示，但表达式不唯一，并指出一般表达式。

14．设有四元齐次线性方程组（I）：$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$和（II）$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$

（1）分别求方程组（I）和（II）的基础解系；

（2）求方程组（I）和（II）的公共解。

15. 已知齐次线性方程组（I）：$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 和方程（II）$x_1+2x_2+x_3=a-1$

有公共解。

（1）求a的值；

（2）求所有公共解。

16．设有四元齐次线性方程组（I）：$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$ 又已知另一四元齐次线性方程组（II）的一个基础解系为$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,\alpha+2,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,\alpha+8)^T$。

（1）求方程组（I）的一个基础解系；

（2）问α何值时（I）与（II）有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部公共解。

17．已知两个线性方程组

$$（I）：\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6, \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3=3, \end{cases} \qquad （II）：\begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5, \\ nx_2-x_3-2x_4=-11, \\ x_3-2x_4=-t+1, \end{cases}$$

（1） 求方程组（I）的通解；
（2） 问 m，n，t 为何值时，方程组（I）和（II）同解？

18．已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

（1）若 a_1，a_2，a_3，a_4 互不相同，证明该方程组无解；
（2）若 $a_1 = a_3 = k$，$a_2 = a_4 = -k$（$k \neq 0$），证明该方程组有解，并求其的通解。

19．已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$。证明：若 $\boldsymbol{A}$ 的某个元素的代数余子式 $A_{ij} \neq 0$，则 $(A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in})^T$ 是所给方程组的一个基础解系。

20．设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $p \times n$ 矩阵，证明方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价。

21．设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) < n$，证明：方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 有非零公共解。

22．设 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$）的解，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$（$m$ 为奇数）为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。证明：方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的任一解都可以表为

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2} + c_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + c_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + \cdots + c_m(\boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\alpha}_1)。$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为常数。

23．设 ξ 是 n 维列向量，满足 $\xi^T \xi = 1$，记 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n - \xi\xi^T$，证明线性方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 必有非零解。