# 线性空间与线性变换练习题

## §1 线性空间

1．设$V=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n \mid x_1=x_2=\cdots=x_n\}$是否按向量的加法和数乘构成$\mathbf{R}$上的线性空间？若是，求出它的维数和一个基。

2．设$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times 2}\,\middle|\, a+b+c+d=0\right\}$是否按矩阵的加法和数乘构成$\mathbf{R}$上的线性空间？若是，求出它的维数和一个基。

3. 证明$n$阶实对称矩阵全体$V_1$和$n$阶实反对称矩阵全体$V_2$均构成$\mathbf{R}^{n\times n}$的子空间，并求它们的维数。

4．已知$\mathbf{R}^4$中向量

$$\boldsymbol{a}_1=(1,2,3,1)^T,\quad \boldsymbol{a}_2=(1,1,2,-1)^T,$$
$$\boldsymbol{a}_3=(-2,-6,1,-6)^T,\quad \boldsymbol{a}_4=(3,4,7,-1)^T,$$

求$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\}$的一个基和维数。

5．已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k & k \\ 1 & k & 0 & 1 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$$

（1）求$\boldsymbol{A}$的零空间$N(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^4 \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$的基与维数；

（2）求$\boldsymbol{A}^T$的零空间$N(\boldsymbol{A}^T)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3 \mid \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$的基与维数

（3）求$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\}$一个基和维数。

6．已知$\mathbf{R}^3$中的两组基为

$$\boldsymbol{a}_1=(1,1,1)^T,\quad \boldsymbol{a}_2=(1,0,-1)^T,\quad \boldsymbol{a}_3=(1,0,1)^T,$$

和

$$\boldsymbol{b}_1=(1,2,1)^T,\quad \boldsymbol{b}_2=(2,3,4)^T,\quad \boldsymbol{b}_3=(3,4,3)^T。$$

（1）求向量$\boldsymbol{x}=(2,2,4)^T$在基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$下的坐标；

（2）求从基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$到基$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$的过渡矩阵；

（3）求向量$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_3$在基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$下的坐标；

（4）求向量$\boldsymbol{y}=4\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-4\boldsymbol{a}_3$在基$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$下的坐标。

7．已知$\mathbf{R}^3$中的两组基为

$$\boldsymbol{a}_1=(1,0,1)^T,\quad \boldsymbol{a}_2=(1,1,-1)^T,\quad \boldsymbol{a}_3=(1,-1,1)^T,$$

和

$$\boldsymbol{b}_1=(3,0,1)^T,\quad \boldsymbol{b}_2=(2,0,0)^T,\quad \boldsymbol{b}_3=(0,2,-2)^T。$$

（1）求从基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$到基$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$的过渡矩阵；

（2）已知向量$\boldsymbol{x}$在$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$下的坐标为$(1,2,0)^T$，求$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$下的坐标；

（3）求在基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$和$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$下具有相同坐标的全部向量。

8．已知$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$是 3 维线性空间$\boldsymbol{V}$的一个基，且

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{b}_2=-\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3,\quad \boldsymbol{b}_3=3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_2-3\boldsymbol{a}_3。$$

（1）证明：$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$也是$\boldsymbol{V}$的一个基；

（2）求向量$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$在基$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$下的坐标。

9．设$P(x)$是在$\mathbf{R}[x]_{n+1}$中的一个$n$次多项式，证明：$P(x)$，$P'(x)$，…，$P^{(n)}(x)$是$\mathbf{R}[x]_{n+1}$的一个基。

10．记$\mathbf{C}[x]_n$为次数小于$n$的复系数多项式全体再添上 0 所成的线性空间。证明：

（1）$P_i(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)$（$i=1,2,\cdots,n$）是$\mathbf{C}[x]_n$的一个基，其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$是互不相同的数；

（2）若$a_1,a_2,\cdots,a_n$全是$n$次单位根（即满足$x^n=1$），求基$1$，$x$，…，$x^{n-1}$到$P_1(x),P_2(x),\cdots,P_n(x)$的过渡矩阵。

## §2　线性变换及其矩阵表示

1．判断下列映射中哪些是线性换，哪些不是：

（1）$A$：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$定义为，若$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$A(\boldsymbol{x})=(x_1^3,x_2^3,x_3^3)^T;$$

（2）设$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2\in\mathbf{R}^3$，$A$：$\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$定义为，若$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$A(\boldsymbol{x})=(x_1+x_2)\boldsymbol{a}_1+(x_2+x_3)\boldsymbol{a}_2;$$

（3）设$\boldsymbol{P}$为$m$阶实矩阵，$\boldsymbol{Q}$为$n$阶实矩阵，$\sigma$：$\mathbf{R}^{m\times n}\to\mathbf{R}^{m\times n}$定义为，

$$\sigma(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{PAQ},\quad \boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}。$$

2．设$\mathbf{R}^3$上的线性变换$A$对于基$\boldsymbol{a}_1=(-1,0,2)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(0,1,1)^T$，$\boldsymbol{a}_3=(3,-1,0)^T$的像为

$$A\boldsymbol{a}_1=(-5,0,3)^T,\quad A\boldsymbol{a}_2=(0,-1,6)^T,\quad A\boldsymbol{a}_3=(-5,-1,9)^T,$$

（1）　求$A$在基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$下的表示矩阵；

（2）　求$A$在自然基$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$下的表示矩阵；

（3）　求$N(A)$与$A(\mathbf{R}^3)$的维数。

3．设$V$是 4 维线性空间。已知$V$上的线性变换$A$在基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_4$下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}。$$

（1）若$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_4$，求$A(\boldsymbol{a})$；

（2）求$A$在基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_4$下的表示矩阵；

（3）求$A$在基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$下的表示矩阵。

4．设$V=\mathbf{R}^{2\times 2}$是实 2 阶实方阵全体组成的线性空间。$V$上的线性变换$\sigma$如下定义：

$$\sigma(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^*,\quad \boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{2\times 2},$$

求$\sigma$在基

$$\boldsymbol{B}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

下的表示矩阵。

5．设$\mathbf{R}^3$上的线性变换$A$对于基

$$\boldsymbol{a}_1=(-1,0,2)^T，\quad \boldsymbol{a}_2=(0,1,1)^T，\quad \boldsymbol{a}_3=(3,-1,-6)^T$$

的像为

$$\boldsymbol{b}_1=A\boldsymbol{a}_1=(-1,0,1)^T，\quad \boldsymbol{b}_2=A\boldsymbol{a}_2=(0,-1,2)^T，\quad \boldsymbol{b}_3=A\boldsymbol{a}_3=(-1,-1,3)^T。$$

（1）求$A$在基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$下的表示矩阵；

（2）求$A(\boldsymbol{b}_1)$，$A(\boldsymbol{b}_2)$，$A(\boldsymbol{b}_3)$；

（3）若$\boldsymbol{a}$在基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$下的坐标为$(5,1,1)^T$，求$A(\boldsymbol{a})$在基$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$下的坐标；

（4）若$\boldsymbol{b}=(1,1,1)^T$，求$A(\boldsymbol{b})$；

（5）若$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}_1-4\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$，求$\boldsymbol{c}$关于$A$的原像$\{\boldsymbol{x}\in V\mid A(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}\}$。

6．设$\mathbf{R}^3$上的线性变换$A$定义为：若$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$A(\boldsymbol{x})=\left(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1\right)^T。$$

（1）求$A$在自然基$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$下的表示矩阵；

（2）若$\boldsymbol{a}=(1,0,-2)^T$，求$A(\boldsymbol{a})$在基$\boldsymbol{a}_1=(2,0,1)^T$，$\boldsymbol{a}_2=(0,-1,1)^T$，$\boldsymbol{a}_3=(-1,0,2)^T$下的坐标；

（3）证明$A$是可逆变换，并求$A^{-1}$。

7．设$\sigma$是线性空间$V$上的可逆线性变换。证明：若$\boldsymbol{x}$是$V$中的非零向量，则$\sigma(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{0}$。

8．设$\sigma$是线性空间$V$上的线性变换，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$是$V$中向量。证明：若$\sigma(\boldsymbol{a}_1),\sigma(\boldsymbol{a}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{a}_m)$线性无关，则$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$也线性无关。

9．设$V$是$n$维线性空间，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$是$V$的一个基。已知$\sigma$是$V$上的线性变换，且在基$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$下的表示矩阵为$\boldsymbol{A}$。证明：若有$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}\in V$使得$\sigma(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{A}$是不可逆矩阵。

10．设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为3阶实矩阵，$\mathbf{R}^3$上的线性变换$A$，$B$定义为：若$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3$，则

$$A(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}，\quad B(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}。$$

（1）若$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，求$A^2$；

（2）若$\boldsymbol{A}$可逆，求$A^{-1}$；

（4）　证明：若$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相乘可交换，则$AB=BA$。

11．设$A$，$B$是线性空间$V$上的线性变换，证明：若$A$和$B$都可逆，则$AB$也是$V$上的可逆线性变换，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

12．设$V=\mathbf{R}^{2\times 2}$是实2阶实方阵全体组成的线性空间。$V$上的线性变换$\sigma$如下定义：若$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则$\sigma(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}b&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$。证明$\sigma$是可逆线性变换，并求$\sigma^{-1}$。

13．设$\sigma$是$n$维实线性空间$V$上的线性变换。证明：若存在实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_n\neq 0$，使得

$$\sigma^n+a_1\sigma^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\sigma+a_nI=0，$$

则$\sigma$是可逆线性变换。

14．设$\sigma$是线性空间$V$上的线性变换。

（1）证明：若存在$\boldsymbol{\xi}\in V$使得$\sigma^k(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0}$，但$\sigma^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\neq\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{\xi},\sigma(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\sigma^{k-1}(\boldsymbol{\xi})$线性无关；

（2）设$\dim V=n$，且存在$\xi\in V$使得$\sigma^n(\xi)=\boldsymbol{0}$，但$\sigma^{n-1}(\xi)\neq\boldsymbol{0}$，求$V$的一个基，使得$\sigma$在这个基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}。$$