教案

重积分变量代换公式的证明

1. 教学内容

我们先对本原变换证明二重积分变量代换公式，然后将一般的变量代换视为向量值函数，将它分解为两个本原变换的复合，从而给出了重积分变量代换公式一个容易理解而简单的证明。

2. 指导思想

重积分变量代换公式的证明是数学分析课程教学中的一个难点，如何化解这一难点，使学生理解并掌握这一重要内容，是本教案的目的。我们通过将一般的变量代换分解为两个本原变换的复合的方法，然后对本原变换的情况进行证明，使得证明简单而容易理解。同时，也教给学生一个如何将复杂的问题化成简单问题的方法。

3. 教学安排

1．我们先叙述定积分的变量代换公式（即换元法），然后利用类比法看一下二重积分变量代换公式应该是怎样的：

定积分：设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，变换 $x=\varphi(t)$ 是一一对应，有连续导数，

$x=\varphi(t):[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）$\to[a,b]$（$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$），则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

二重积分：设 $f(x,y)$ 在有界闭区域D连续，变换 $T:\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$: $\mathbf{D}\to T(\mathrm{D})$

是一一对应，有连续偏导数，则类比定积分的变量代换公式，重积分的变量代换公式**似乎应该是**

$$\iint\limits_{T(\mathbf{D})} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\mathbf{D}} f(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv,$$

其中 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 是向量值函数 T 的导数。但是**注意**在定积分情况下，如果 $\varphi'(t)<0$，则 $\alpha>\beta$，即右端积分的上限小于下限，交换积分上下限后，$\varphi'(t)$ 就换成 $-\varphi'(t)$；而在重积分情况下，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 也有可能小于 0，但由于积分区域D没有方向（或符号）概念，因此对 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 要加上绝对值符号，即

$$\iint_{T(\mathbf{D})} f(x,y)dxdy = \iint_{\mathbf{D}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv。$$

2．二重积分变量代换公式

设$\mathbf{U}$为uv平面上的开集，$\mathbf{V}$是xy平面上开集，映射

$$T:\quad x = x(u,v)\ ,\ y = y(u,v)$$

是$\mathbf{U}$到$\mathbf{V}$的一个一一对应。 进一步假设$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$具有连续偏导数，且有$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$，则由连续性可知$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$在$\mathbf{U}$上不变号。对于$\mathbf{U}$中任意具有分段光滑边界的有界闭区域$\mathbf{D}$，记它的像为$\mathbf{E} = T(\mathbf{D}) \subset \mathbf{V}$，则$\mathbf{E} = T(\mathbf{D})$也是具有分段光滑边界的有界闭区域。换言之，区域$\mathbf{D}$与$\mathbf{E} = T(\mathbf{D})$都具有零边界。在这样的假设下，我们有如下的二重积分的变量代换公式。

定理 1（二重积分变量代换公式） 映射T和区域$\mathbf{D}$如上假设。如果二元函数$f(x,y)$在$T(\mathbf{D})$上连续，则

$$\iint_{T(\mathbf{D})} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbf{D}} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v。$$

为证明定理 1，我们将区域$\mathbf{D}$用水平线与垂直线分割成许多小矩形，由于区域$\mathbf{D}$具有零边界，当分割充分细的时候，与区域$\mathbf{D}$边界相交的小矩形的面积之和可以任意小，因此我们只需要考虑包含在区域$\mathbf{D}$内的小矩形R。

3．**定义** 形如

$$T_x:\quad x = x(u,v) = u,\ y = y(u,v)$$

或

$$T_y:\quad x = x(u,v),\ y = y(u,v) = v$$

的映射称为**本原映射**。

引理 1 设T为本原映射，则对于每个小矩形R，等式

$$mT(R) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u},\tilde{v})} mR$$

成立，这里$(\tilde{u},\tilde{v})$为R上某一点。

证 仅对本原映射T_x证明，对T_y的证明是类似的。

设在$\mathbf{U}$上$J > 0$。由于这时成立

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial v} > 0,$$

所以在每个小矩形$R=[e, f]\times[g, h]$上，对于固定的u, $y(u,v)$是v的单调增加函数，因此R被一一对应地映到

$$T(R) = \{(x,y) \mid e \le x \le f,\ y(x,g) \le y \le y(x,h)\}。$$

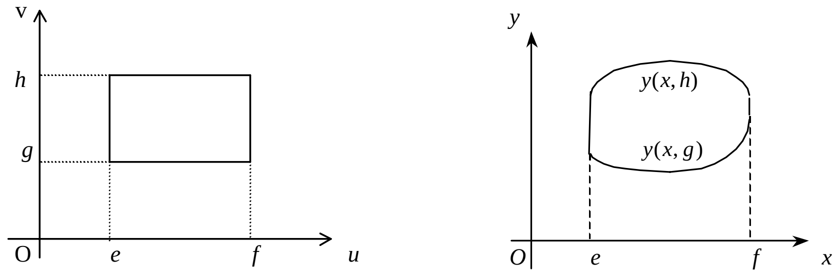

图 13.3.9

所以$T(R)$的面积为

$$mT(R)=\iint_{T(R)}dxdy=\int_e^f dx\int_{y(x,g)}^{y(x,h)}dy=\int_e^f[y(x,h)-y(x,g)]dx=(y(\tilde{u},h)-y(\tilde{u},g))(f-e),$$

其中$e\le\tilde{u}\le f$。最后一步是利用了积分中值定理。再用一次微分中值定理得

$$mT(R)=\frac{\partial y}{\partial v}(\tilde{u},\tilde{v})(h-g)(f-e)=\frac{\partial y}{\partial v}(\tilde{u},\tilde{v})mR=\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)_{(\tilde{u},\tilde{v})}mR,$$

其中$g<\tilde{v}<h$。

如果T的 Jacobi 行列式为负的，以上讨论中关于y的不等式反向，重复以上证明可同样得到

$$mT(R)=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u},\tilde{v})}mR。$$

证毕

下面证明变量代换公式对于本原映射成立。

引理 2 设T为本原映射，二元函数$f(x,y)$在$T(\mathbf{D})$上连续，则

$$\iint_{T(\mathbf{D})}f(x,y)dxdy=\iint_{\mathbf{D}}f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv。$$

证

考虑上述对区域$\mathbf{D}$的分割，设$\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2,\cdots,\mathbf{D}_M$是包含在区域$\mathbf{D}$内的所有小矩形，由引理 1，在$\mathbf{D}_i$上成立

$$mT(\mathbf{D}_i)=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)}m\mathbf{D}_i,$$

这里$(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$为$\mathbf{D}_i$中某一点。设$\tilde{x}_i=x(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$, $\tilde{y}_i=y(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$，则从上式得

$$\sum_i f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)mT(D_i)=\sum_i f(x(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i),y(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)}mD_i,$$

设所有小矩形的对角线长度的最大值为ρ，令ρ趋于 0，由二重积分的定义，即得

$$\iint_{T(\mathbf{D})}f(x,y)dxdy=\iint_{\mathbf{D}}f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv。$$

证毕

为了完全证明定理 1，还需要以下的结果：

引理 3　设 T 满足定理 1 的假设，则对于任意点 $Q_0=(u_0,v_0)\in\mathbf{U}$，$T$ 在点 Q_0 附近可以表示成 2 个具有连续偏导数的、一对一的本原映射的复合。

证　设 $x_0=x(u_0,v_0),\ y_0=y(u_0,v_0),\ P_0=(x_0,y_0)$。

由于 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\neq 0$，行列式中必有元素不为零。不妨设 $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\neq 0$，于是，本原映射

$$T_1:\begin{cases}\xi=x(u,v),\\ \eta=v\end{cases}$$

的 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)=\dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\neq 0$，由隐函数存在定理（或逆映射定理），局部地可得逆映射 $\begin{cases}u=g(\xi,\eta),\\ v=\eta,\end{cases}$ 且 $g(\xi,\eta)$ 在 $T_1(u_0,v_0)$ 的一个邻域具有连续偏导数。注意这时成立 $g(x(u,v),v)=u$。

作

$$T_2:\begin{cases}x=\xi,\\ y=y(g(\xi,\eta),\eta),\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}&x=\xi=x(u,v),\\ &y=y(g(\xi,\eta),\eta)=y(g(x(u,v),v),v)=y(u,v)。\end{aligned}$$

即 $T_2\circ T_1=T$。

证毕

4．二重积分变量代换公式的证明：

根据引理 3，对于每点 $Q=(u,v)\in\mathbf{D}$ 存在它的一个邻域 $U_\delta(Q)$，在这个邻域中，T 可以表示为两个一对一的本原映射的复合。由于 $\left\{U_{\delta/2}(Q)\mid Q\in\mathbf{D}\right\}$ 覆盖了 $\mathbf{D}$，由 Heine-Borel 定理，存在有限多个邻域

$$U_{\delta_1/2}(Q_1),U_{\delta_2/2}(Q_2),\cdots,U_{\delta_S/2}(Q_S),$$

它们覆盖了 $\mathbf{D}$。设 $\delta_*=\min\left\{\dfrac{\delta_1}{2},\dfrac{\delta_2}{2},\cdots,\dfrac{\delta_S}{2}\right\}$。

取划分充分细，使得所有的小矩形的对角线长度都小于 δ_*，那么当小矩形 D_i 与 $U_{\delta_j/2}(Q_j)$ 相交时，$\mathbf{D}_i$ 必包含在某个 $U_{\delta_j}(Q)$ 中 $(1\le j\le S)$。于是在每个 $\mathbf{D}_i$（$i=1,2,\cdots,M$）上成立 $T=T_2\circ T_1$（为简便起见去掉了标记 i，注意对不同的 $\mathbf{D}_i$，可能有不同 T_1 和 T_2），这里 T_1 和 T_2 是本原映射。设

$$T_1:\begin{cases}\xi=\xi(u,v),\\ \eta=\eta(u,v),\end{cases}\quad 和\quad T_2:\begin{cases}x=x(\xi,\eta),\\ y=y(\xi,\eta).\end{cases}$$

那么

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\cdot\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}。$$

由引理 2 得

$$\iint\limits_{T(\boldsymbol{D}_i)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{T_1(\boldsymbol{D}_i)} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta$$

$$= \iint\limits_{\boldsymbol{D}_i} f(x(\xi(u,v),\eta(u,v)),y(\xi(u,v),\eta(u,v)))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$= \iint\limits_{\boldsymbol{D}_i} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv\text{。}$$

因此

$$\iint\limits_{T(\mathbf{D})} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{M}\iint\limits_{T(\mathbf{D}_i)} f(x,y)dxdy$$

$$= \sum_{i=1}^{M}\iint\limits_{\mathbf{D}_i} f(x(u,v),y(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv = \iint\limits_{\mathbf{D}} f(x(u,v),y(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

证毕

5． $\boldsymbol{n}$重积分的变量代换公式

对于$\boldsymbol{n}$重积分的变量代换，我们不加证明给出公式：

设$\mathbf{U}$为$\mathbf{R}^n$（$n>2$）上的开集，映射

$$T:\quad y_1 = y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\ y_n = y_n(x_1,\cdots,x_n)$$

将$\mathbf{U}$一一对应地映到$\mathbf{V}\subset\mathbf{R}^n$上。进一步假设 $y_1 = y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_n = y_n(x_1,\cdots,x_n)$ 都具有连续偏导数，而且这个映射的 Jacobi 行列式不等于零。

设$\mathbf{\Omega}$为$\mathbf{U}$中具有分片光滑边界的有界闭区域，则有与二维情形类似的结论：

定理 2 映射T和区域$\mathbf{\Omega}$如上假设。如果$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是T $(\mathbf{\Omega})$上的连续函数，那么变量代换公式

$$\int\limits_{T(\Omega)} f(y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n = \int\limits_{\Omega} f(y_1(\boldsymbol{x}),\cdots,y_n(\boldsymbol{x}))\left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|dx_1\cdots dx_n$$

成立，其中$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$。

4．注意点

1．重积分变量代换的概念，是数学分析课程中一个比较困难的内容。我们先通过类比方法，写出重积分变量代换的公式，使得学生先有一个对重积分变量代换的概念，然后再来证明，学生也就容易理解。同时通过类比，使学生容易记住这一重要的公式。

2．将一般的变量代换视为向量值函数，将它分解为两个本原变换的复合，也就是将复杂的函数分解成简单函数的复合，将问题化为对简单函数的证明，这是数学上常用的一种方法，通过学习，希望同学掌握这一方法。

3．在证明中，我们只考虑了包含在区域$\mathbf{D}$内的小矩形，这是因为区域$\mathbf{D}$具有零边界。通过学习，要求同学理解为什么我们在本章开始要引进零边界区域的概念。