教案

数学分析中一个反例的教学

复旦大学　　陈纪修　金 路　邱维元

教学内容

讲授数学分析发展历史上一个重要的反例：处处连续处处不可导的函数，以及这一反例对数学学科发展的影响；介绍德国数学家 Weierstrass 的生平与对数学分析所作的贡献。

指导思想

通过讲授处处连续处处不可导的函数的例子与介绍德国数学家 Weierstrass 的贡献，使学生掌握函数项级数一致收敛理论的重要应用，认识到数学家如何通过从提出猜想，到证明或否定猜想的过程，使数学学科得到发展的，从而使学生在今后的学习中重视对反例的探讨。

教学安排

（1）德国数学家 Weierstrass 的简单介绍

同学们，前一阶段，我们学习了函数项级数一致收敛的理论，有了这一基础，我们可以来介绍一个在数学分析中非常重要的内容。这个结果是属于 Weierstrass 的。关于 Weierstrass 这个名字，我们并不陌生（我们已学过以他的名字冠名的定理有：有界数列必有收敛子列，函数项级数的 Weierstrass 判别法等），在以后的学习中，你们将会不断遇上 Weierstrass 这个名字。Karl Weierstrass （1815—1897）是 19 世纪德国数学家，他在数学的许多领域都作出了重大贡献，其中不少成果是在他做中学教师时取得的。后来他被聘为柏林大学教授和法国巴黎科学院院士。他是数学分析基础的主要奠基者之一，是把严格的数学论证引进分析学的一位大师。Weierstrass 利用单调有界的有理数数列来定义无理数，从而在严格的逻辑基础上建立了实数理论；关于连续函数的分析定义（即$\varepsilon-\delta$语言）也是他给出的，这些贡献使得数学分析的叙述精确化，论证严格化。

（2）处处连续处处不可导的函数

在数学分析的发展历史上，数学家们一直猜测：连续函数在其定义区间中，至多除去可列个点外都是可导的。也就是说，连续函数的不可导点至多是可列集。在当时，由于函数的表示手段有限，而仅仅从初等函数或从分段初等函数表示的角度出发去考虑，这个猜想是正确的。 但是随着级数理论的发展，函数表示的手段扩展了，数学家可以通过函数项级数来表示更广泛的函数类。Weierstrass 是一位研究级数理论的大师，他于 1872 年利用函数项级数第一个构造出了一个处处连续而处处不可导的函数，为上述猜测做了一个否定的终结：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos\left(b^n x\right),\quad 0<a<1<b,\quad ab>1。$$

下面叙述的反例在证明上要相对简易些，它是由荷兰数学家 **Van Der Waerden** 于 1930 年给出的：

设$\varphi(x)$表示 x 与最邻近的整数之间的距离，例如当 $x=1.26$，则$\varphi(x)=0.26$；当 $x=3.67$，则$\varphi(x)=0.33$。显然$\varphi(x)$是周期为 1 的连续函数，且$\varphi(x)\le 1/2$。

注意当 $x, y \in [k, k+\frac{1}{2}]$ **或** $[k+\frac{1}{2}, k+1]$ **时，成立** $|\varphi(x)-\varphi(y)|=|x-y|$ 。

Van Der Waerden 给出的例子是：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(10^n x)}{10^n}.$$

由 $\left|\frac{\varphi(10^n x)}{10^n}\right| \le \frac{1}{2\cdot 10^n}$ ，及 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 10^n}$ 的收敛性，根据 Weierstrass 判别法，上述函数项级数关于 $x \in (-\infty,+\infty)$ 一致收敛。所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续。

（3）处处不可导的证明

现考虑 $f(x)$ 在任意一点 x 的可导性。由于 $f(x)$ 的周期性，不妨设 $0 \le x < 1$ ，并将 x 表示成无限小数

$$x = 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots 。$$

若 x 是有限小数时，则在后面添上无穷多个 0。然后我们取

$$h_m = \begin{cases} 10^{-m}, & \text{当} a_m = 0,1,2,3,5,6,7,8, \\ -10^{-m}, & \text{当} a_m = 4,9, \end{cases}$$

例如设 $x = 0.309546\cdots$，则我们取 $h_1 = 10^{-1}$ ，$h_2 = 10^{-2}$ ，$h_3 = -10^{-3}$ ，$h_4 = 10^{-4}$ ，$h_5 = -10^{-5}$ ，$h_6 = 10^{-6}$ ，$\cdots$。显然

$$h_m \to 0 \ (m\to\infty)。$$

于是我们只要证明极限 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$ 不存在。

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(10^n(x+h_m))-\varphi(10^n x)}{10^n h_m}$$

$$=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\varphi(10^n(x+h_m))-\varphi(10^n x)}{10^n h_m}+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\varphi(10^n(x+h_m))-\varphi(10^n x)}{10^n h_m}$$

当 $n \ge m$ 时，$\varphi(10^n(x+h_m)) = \varphi(10^n x \pm 10^{n-m}) = \varphi(10^n x)$，所以

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m-1}\frac{\varphi(10^n(x+h_m))-\varphi(10^n x)}{10^n h_m}.$$

当 $n = 0,1,2,\cdots,m-1$ ，在 $10^n x$ 的表示中 a_m 的位置是第 $m-n$ 位小数，

$$10^n x = a_1 a_2 \cdots a_n . a_{n+1}\cdots a_m \cdots,$$

$$10^n(x+h_m) = a_1 a_2 \cdots a_n . a_{n+1}\cdots(a_m \pm 1)\cdots,$$

由 h_m 的取法，可知 $10^n(x+h_m)$与$10^n x$同时属于 $[k, k+\frac{1}{2}]$ 或 $[k+\frac{1}{2}, k+1]$ ，因此

$$\varphi(10^n(x+h_m)) - \varphi(10^n x) = \pm 10^n h_m,$$

于是我们得到

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m-1}\pm 1 ,$$

等式右端必定是整数，且其奇偶性与 m 一致，由此可知极限

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$$

不存在，也就是说， $f(x)$ 在任意一点 x 是不可导的。这样，一个处处连续，但

处处不可导的函数反例通过了函数项级数这一工具而被构造出来了。

（4）电子课件演示

（5）总结

Weierstrass 的反例构造出来后，在数学界引起极大的震动，因为对于这类函数，传统的数学方法已无能为力，这使得经典数学陷入又一次危机。但是反过来危机的产生又促使数学家们去思索新的方法对这类函数进行研究，从而促成了一门新的学科“分形几何”的产生。所谓“分形”，就是指几何上的一种“形”，它的局部与整体按某种方式具有相似性。“形”的这种性质又称为“自相似性”。

我们知道，经典几何学研究的对象是规则而光滑的几何图形，但是自然界存在着许多不规则不光滑的几何图形，它们都具有上面所述的“自相似性”。如云彩的边界；山峰的轮廓；奇形怪状的海岸线；蜿蜒曲折的河流；材料的无规则裂缝，等等。这些变化无穷的曲线，虽然处处连续，但可能处处不可导。因此“分形几何”自产生起，就得到了数学家们普遍的关注，很快就发展为一门有着广泛应用前景的新的学科。

通过这个例子，同学们可以了解到数学学科的发展规律，认识到一个反例如何促成一门新学科的产生。希望同学们在今后的学习中，重视对反例的探索。

注意点

（1）在 Weierstrass 反例的证明中，注意 h_m 的符号的选取是证明的关键。这样的符号选取保证了当 $n=0,1,2,\cdots,m-1$ 时，$10^n(x+h_m)$ 与 $10^n x$ 或者同时属于 $[k,k+\frac{1}{2}]$，或者同时属于 $[k+\frac{1}{2},k+1]$，从而有

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\varphi(10^n(x+h_m))-\varphi(10^n x)}{10^n h_m}=\sum_{n=0}^{m-1}\pm 1\ 。$$

（2）在用电子课件演示 Weierstrass 反例的几何性状时，应强调 Weierstrass 函数的局部与整体性质上的相似性，从而使学生对“分形”有一个初步的感性认识。