教案

用微积分推导 Newton 的万有引力定律

复 旦 大 学　 於 崇 华

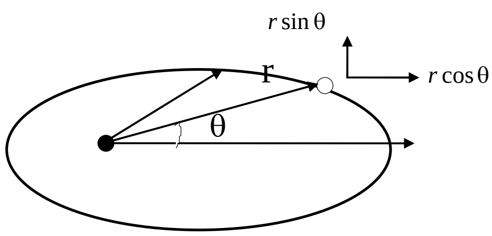
Newton 万有引力定律

宇宙万物之间都存在相互的引力，其作用方向在两者的连线上，其大小与两者质量的乘积成正比而和两者距离的平方成反比。比例系数是绝对常数

为了推导内在的定量关系即数学规律，先要将行星运动定律用数学形式表达出来。

Kepler 第一定律：行星围绕太阳运动的轨迹是一个椭圆，太阳在椭圆的一个焦点上。

以太阳为极点，椭圆的长轴为极轴建立极坐标，则行星的轨道方程为



$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta},$$

这里 $p = \frac{b^2}{a}$ 是焦参数，$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ 是离心率，a 和 b 分别是椭圆的半长轴和半短轴。

设在 t 时刻：

行星与太阳的距离为 $r = r(t)$，它们的连线与极轴的夹角为 $\theta = \theta(t)$，则行星的坐标可以用向量记号表示成

$$\boldsymbol{r}=(r\cos\theta, r\sin\theta)。$$

先从 Newton 第二运动定律 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 入手

将 $\boldsymbol{r}$ 分解成水平分量 $r\cos\theta$ 和垂直分量 $r\sin\theta$，利用运动的独立性原理，用 Newton 第二运动定律

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2},$$

分别求它们的二阶导数后再合成。

记行星沿极径方向的速度: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\equiv\dot{r}$ （称为径向速度）

加速度: $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\equiv\ddot{r}$ （称为径向加速度），

角速度: $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\equiv\omega$ 角加速度: $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\equiv\dot{\omega}$

利用复合函数的求导法则(r 和 θ 都是 t 的函数)，行星在 x 方向和 y 方向上的加速度分量分别为

$$\frac{d^2(r\cos\theta)}{dt}=\ddot{r}\cos\theta-2\dot{r}\omega\sin\theta-r[\dot{\omega}\sin\theta+\omega^2\cos\theta]$$

$$=(\ddot{r}-r\omega^2)\cos\theta-(2\dot{r}\omega+r\dot{\omega})\sin\theta\ ;$$

$$\frac{d^2(r\sin\theta)}{dt}=\ddot{r}\sin\theta+2\dot{r}\omega\cos\theta+r[\dot{\omega}\cos\theta-\omega^2\sin\theta]$$

$$=(2\dot{r}\omega+r\dot{\omega})\cos\theta+(\ddot{r}-r\omega^2)\sin\theta。$$

记 r 方向上的单位向量 $\boldsymbol{r}_0=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=(\cos\theta,\sin\theta)$，则加速度向量

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=(\ddot{r}-r\omega^2)\boldsymbol{r}_0+\left(\frac{2\dot{r}\omega+r\dot{\omega}}{\omega}\right)\dot{\boldsymbol{r}}_0 \qquad (1)$$

为了得到行星运动规律，必须求出$\ddot{r}-r\omega^2$ 与 $\dfrac{2\dot{r}\omega+r\dot{\omega}}{\omega}$，而求这两个量只能借助其它的关系式

试着将 Kepler 的行星运动第二定律用数学形式表达出来：

Kepler 第二定律：单位时间中，极径扫过的那块椭圆的面积是常数。

记$\mathrm{d}A$是极径转过角度$\mathrm{d}\theta$所扫过的那块椭圆的面积，则由极坐标下的面积公式的微分形式，

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta,$$

因此，单位时间中扫过的面积

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\omega=\text{常数。}$$

记行星绕太阳运行一周的时间为T，则经过T时间极径所扫过的面积恰为整个椭圆的面积πab，由定积分的定义和性质，利用微元法，即得

$$\pi ab=\int_0^T\frac{dA}{dt}dt=\frac{1}{2}r^2\omega T,$$

因此常数

$$r^2\omega=\frac{2\pi ab}{T},$$

两边求导后得到

$$(r^2\omega)'=2r\dot{r}\omega+r^2\dot{\omega}=0,$$

即

$$2\dot{r}\omega+r\dot{\omega}=0。$$

这样，(1) 的最后一项就去掉了，等式成为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=(\ddot{r}-r\omega^2)\boldsymbol{r}_0 \qquad (2)$$

这表示：行星在任一点的加速度的方向（也就是受力的方向）恰与它的极径同向。

从求加速度分量的过程可以发现，加速度的值 $\ddot{r}-r\omega^2$ 来自对 $r\cos\theta$（或 $r\sin\theta$）求二阶导数，而椭圆方程

$$p=r(1-e\cos\theta)$$

中恰含有 $r\cos\theta$ 项。这提示我们，可能可以通过对椭圆方程两边求二阶导数来计算出 $\ddot{r}-r\omega^2$。

$$\begin{aligned}0=\ddot{p}&=\ddot{r}-e\frac{d^2(r\cos\theta)}{dt}\\&=\ddot{r}-(\ddot{r}-r\omega^2)e\cos\theta\\&=(\ddot{r}-r\omega^2)(1-e\cos\theta)+r\omega^2\\&=\frac{\ddot{r}-r\omega^2}{r}\cdot p+r\omega^2,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\ddot{r}-r\omega^2&=-\frac{(r^2\omega)^2}{r^2}\cdot\frac{1}{p}=-\frac{4\pi^2a^2b^2}{T^2}\frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{r^2}\\&=-4\pi^2\cdot\frac{a^3}{T^2}\cdot\frac{1}{r^2}。\end{aligned} \qquad (3)$$

Kepler 第三定律：椭圆的半长轴 a 的三次方和运行周期 T 的平方成正比，即 $\frac{a^3}{T^2}=$ 常数，记太阳的质量为 M，有

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m(\ddot{r}-r\omega^2)\boldsymbol{r}_0=-\left(\frac{4\pi^2}{M}\cdot\frac{a^3}{T^2}\right)\cdot\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{r}_0，$$

记万有引力常数

$$G=\frac{4\pi^2}{M}\frac{a^3}{T^2}\approx 6.67\times 10^{-11}(m^3/kg\cdot s^2)\,,$$

便得到万有引力定律的数学表示

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{r}_0\,。$$

宇宙万物之间都存在相互的引力，其作用方向在两者的连线上，其大小与两者质量的乘积成正比而和两者距离的平方成反比。比例系数是绝对常数

说　明

（1）以上只是论证了万有引力定律对太阳-行星系统是正确的。但以后的科学工作者（包括 Newton 本人）一系列的观测和实验数据证实，它确实“放之四海而皆准”，适用范围从天体运动延展到微观世界，令人信服地定量地解释了许多物理现象，并成为探索未知世界的有力工具。其中一些著名的例子：

●计算出哈雷彗星的轨道和运行周期；

●发现海王星和冥王星；

●正确解释了潮汐的起因和规律；

●计算出第一、第二和第三宇宙速度，指导人类宇航活动。

（2）**数学的产生与发展离不开外部世界的推动，是和解决实际问题紧密联系的。**万有引力定律是人类历史上最伟大的数学模型之一。而一个成功的数学模型对文明发展的影响和作用可能无法估量，因此数学及其应用对整个人类文明进程举足轻重。

（3）**一切伟大的科学发现都是站在巨人肩膀上取得的**，因此学好前人的科学总结，即打好基础对于培养创新精神极为重要。

（4）通过此过程可以复习微积分中的一系列重要内容，如：高阶导数、复合函数求导法则、微元法等，并进一步学会如何具

体运用这些知识进行简单的数学建模和求解。

(5) 若承认 Newton 万有引力定律，用微积分作为工具，也可导出 Kepler 的行星运动三大定律，这说明两者存在着深刻的内在联系（今后在其它课程，如常微分方程、数学模型中学习）