Weierstrass 第一逼近定理与第二逼近定理

Karl Weierstrass （1815—1897）是 19 世纪德国数学家，他在数学的许多领域都作出了重要的工作，其中不少成果是在他做中学教师时取得的。由于他对数学科学的重大贡献，他后来被聘为柏林大学教授和法国巴黎科学院院士。

Weierstrass 是数学分析基础的主要奠基者之一，是把严格的数学论证引进分析学的一位大师。Weierstrass 利用单调有界的有理数数列来定义无理数，从而在严格的逻辑基础上建立了实数理论；他提出的关于极限定义的$\varepsilon-\delta$语言，被数学界公认为是关于极限概念的最准确的描述，并被一直使用至今。

连续函数的多项式逼近：Bernstein 多项式

连续函数可以由多项式一致逼近是分析中的重要定理，直接的证明方法就是用函数的 Bernstein 多项式去逼近函数。通常的教材中的证明比较难于理解，我们选择前苏联数学家 Korovkin 在 1953 年给出证明方法，解决了教学中的这一难点。

Weierstrass 第一逼近定理 设$f(x)$是闭区间$[a, b]$上的连续函数，则存在多项式序列$\{P_n(x)\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f(x)$。也就是对任意给定的$\varepsilon>0$，存在多项式$P(x)$，使得

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切$x\in[a, b]$成立。

证 不失一般性，设$[a, b]$为$[0, 1]$。

设X是$[0, 1]$上连续函数$f(t)$全体构成的集合，Y是多项式全体构成的集合，定义映射

$$B_n: X \to Y$$

$$f(t)\mapsto B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

得到$\{B_n(f,x)\}$，$B_n(f,x)$表示$f\in X$在映射B_n作用下的像，它是以x为变量的n次多项式，称为f的n次 **Bernstein** 多项式。

关于映射B_n，有下述基本性质与基本关系式：

(1)线性性：对于任意$f,g\in X$及$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，成立

$$B_n(\alpha f+\beta g,x)=\alpha B_n(f,x)+\beta B_n(g,x);$$

(2)单调性：若$f(t)\ge g(t)$（$t\in[a, b]$），则

$$B_n(f,x)\ge B_n(g,x)\quad(x\in[a, b]);$$

(3) $B_n(1,x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = 1$；

$B_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = x$；

$B_n(t^2,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = x^2+\frac{x-x^2}{n}$。

函数$(t-s)^2$在B_n映射下的像（视s为常数）：

$$B_n((t-s)^2,x)=B_n(t^2,x)-2sB_n(t,x)+s^2B_n(1,x)$$

$$=x^2+\frac{x-x^2}{n}-2sx+s^2=\frac{x-x^2}{n}+(x-s)^2.$$

由于f 在[0, 1]上连续，所以有界，即存在$M>0$，对于一切$t\in[0, 1]$，成立

$$|f(t)|\le M\text{；}$$

根据 Cantor 定理，f在[0, 1]上一致连续，于是对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对一切$t,s\in[0, 1]$：

当$|t-s|<\delta$时，成立

$$|f(t)-f(s)|<\frac{\varepsilon}{2}\text{；}$$

当$|t-s|\ge\delta$时，成立

$$|f(t)-f(s)|\le 2M\le\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2\text{。}$$

于是对一切$t,s\in[0, 1]$，成立

$$|f(t)-f(s)|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2\text{，}$$

即

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2\le f(t)-f(s)\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2\text{。}$$

对上式的左端，中间，右端三式（视t为变量，s为常数）考虑在映射B_n作用下的像，得到对一切$x,s\in[0, 1]$，成立

$$-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{x-x^2}{n}+(x-s)^2\right]\le B_n(f,x)-f(s)\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{x-x^2}{n}+(x-s)^2\right]\text{，}$$

令$s=x$，注意$x(1-x)\le\frac{1}{4}$，即得到对一切$x\in[0, 1]$，成立

$$\left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}-f(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\delta^2}\text{。}$$

取$N=\left[\frac{M}{\delta^2\varepsilon}\right]$，当$n>N$时,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - f(x)\right| < \varepsilon$$

对一切 $x \in [0, 1]$成立。

连续周期函数的三角多项式逼近

形如 $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 的三角函数式称为三角多项式。

Weierstrass 第二逼近定理 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，则存在三角多项式序列一致收敛于 $f(x)$。也就是对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在三角多项式 $T(x)$，使得

$$|T(x) - f(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立。

先证明一个引理：

引理 设 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在余弦三角多项式 $T(x)$，使得

$$|T(x) - g(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in [0, \pi]$ 成立。

证 $g(\arccos y)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，由 Weierstrass 第一逼近定理，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在多项式 $P(y)$，使得

$$|P(y) - g(\arccos y)| < \varepsilon$$

对一切 $y \in [-1,1]$ 成立，即

$$|P(\cos x) - g(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in [0, \pi]$ 成立。由三角恒等式

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$，$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$，$\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$，

$$\cdots\cdots,$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_{2n}^k \cos 2(n-k)x + \frac{1}{2} C_{2n}^n\right),$$

$$\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^k \cos(2n-2k+1)x\ 。$$

可知 $P(\cos x) = T(x)$ 是余弦三角多项式。

推论　设 $g(x)$ 是以 2π 为周期的连续偶函数，则 Weierstrass 第二逼近定理成立，且三角多项式是余弦三角多项式。

Weierstrass 第二逼近定理的证明

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，令

$$\varphi(x) = f(x) + f(-x)\text{，}\quad \psi(x) = [f(x) - f(-x)]\sin x\text{，}$$

则 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 都是以 2π 为周期的连续偶函数，由上面的推论，可知对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在余弦三角多项式 $T_1(x)$ 与 $T_2(x)$，使得

$$|\varphi(x) - T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\text{，}\quad |\psi(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立。

记 $T_3(x) = T_1(x)\sin^2 x + T_2(x)\sin x$，于是由

$$|\varphi(x)\sin^2 x - T_1(x)\sin^2 x| < \frac{\varepsilon}{2}\text{，}\quad |\psi(x)\sin x - T_2(x)\sin x| < \frac{\varepsilon}{2}\text{，}$$

得到

$$|2f(x)\sin^2 x - T_3(x)| < \varepsilon \qquad (*)$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立。由于上式对 $f(t - \frac{\pi}{2})$ 也成立，于是也有

$$|2f(t - \frac{\pi}{2})\sin^2 t - T_4(t)| < \varepsilon\text{。}$$

令 $x = t - \frac{\pi}{2}$，得到

$$|2f(x)\cos^2 x - T_4(x + \frac{\pi}{2})| < \varepsilon \qquad (**)$$

对一切 $x \in (-\infty, \infty)$ 成立。

记 $T_5(x) = \frac{1}{2}[T_3(x) + T_4(x + \frac{\pi}{2})]$，结合（*）与（**），得到

$$|f(x) - T_5(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in (-\infty, \infty)$ 成立。