第三讲 《数学分析》课程中最重要的两个常数π和e

英国哲学家罗素（Bertrand Russell）曾经说过：数学里不仅有很多真理，而且有着极致的美。这种美冷峻如雕塑，……，它极纯净，能够向我们展示只有最伟大的艺术才具有的完美。

π和e是《数学分析》课程中最重要的两个常数，课程中包含了关于这两个常数丰富的内容，也得到了许多漂亮的结果。讲好讲透这两个常数，使学生了解这两个常数在数学中的地位，并从这两个常数来体会数学的“美”，对于提高学生的学习兴趣，提高教学效果，具有重要的意义。

例 1 判别π^e与e^π的大小关系。

先考虑一般的情况：设a和b是两个不同的正实数，问在什么条件下成立$a^b > b^a$？

两边取对数后再整理，即知上式等价于

$$\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b},$$

所以，判别a^b与b^a的大小关系可以通过确定函数$\frac{\ln x}{x}$的单调情况来得到。

解 记$f(x) = \frac{\ln x}{x}$，则

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \quad \begin{cases} < 0, & x > \mathrm{e}. \\ > 0, & 0 < x < \mathrm{e}. \end{cases}$$

$f(x)$在$[\mathrm{e},+\infty)$严格单调减少。因此

$$\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi},$$

即可判别出

$$e^\pi > \pi^e。$$

1．常数e

定理1 数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调增加，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$单调减少，两者收敛于同一极限。

证 记$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，利用平均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (a_k > 0,\quad k = 1,2,3,\cdots,n),$$

得到

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \le \left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1} = x_{n+1},$$

和

$$\frac{1}{y_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot 1 \le \left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2} = \frac{1}{y_{n+1}}。$$

这表示$\{x_n\}$单调增加，而$\{y_n\}$单调减少。又由于

$$2 = x_1 \le x_n < y_n \le y_1 = 4,$$

可知$\{x_n\},\{y_n\}$都收敛。由$y_n = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，它们具有相同的极限。通常用字母$e$来表示这一极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e。$$

以e为底的对数称为自然对数，e称为自然对数的底数，记$\log_e a = \ln a$。

例2 设 $b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，则数列$\{b_n\}$收敛。

证 由

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

得到

$$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}。$$

于是有

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0\text{，}$$

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n$$

$$=\ln(n+1)-\ln n>0\text{。}$$

这说明数列 { b_n } 单调减少有下界，从而收敛。{ b_n }的极限 γ=0.57721566490…称为Euler常数。设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，可知数列{ a_n }是无穷大量，它与无穷大量 $\ln n$ 是等价的。

例3 设 $d_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，由于

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n\to\gamma\ (n\to\infty)\text{，}$$

和

$$b_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\ln 2n\to\gamma\ (n\to\infty)\text{，}$$

考虑 $b_{2n}-b_n$，用 b_{2n} 中的第 $2k$ 项与 b_n 中的第 k 项（$k=1,2,\cdots,n$）对应相减，得到

$$b_{2n}-b_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}-\ln 2=d_{2n}-\ln 2\to 0\quad (n\to\infty)\text{。}$$

由于 $d_{2n+1}=d_{2n}-\frac{1}{2n+1}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$，即可得到

$$\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]=\ln 2\text{，}$$

即

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots=\ln 2\text{。}\qquad（1）$$

2．常数π

圆的周长与直径的比定义为圆周率π，则单位圆的半周长为π，但单位圆的面积为什么等于π，则是需要证明的。

我们先定义曲线的长度：将曲线作划分，将分点联结起来，得到

一条折线，折线的长度是可以计算的。如果随着划分的加细，折线的长度有极限，且极限值与划分的加细无关，则此极限值就定义为曲线的长度。换言之，曲线的长度为折线长度的极限。

设单位圆内接正n边形的半周长为L_n，则$L_n = n\sin\frac{180^{\circ}}{n}$。容易证明数列$\{L_n\}$单调增加有上界，所以收敛，而极限值应该就是单位圆的半周长，即π：

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{180^{\circ}}{n} = \pi \text{。}$$

由于单位圆的半周长为π，我们就把半个圆周所对的圆心角（即180°）的弧度定义为π，其余角度的弧度则按比例得到。于是按弧度制上式可写成

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \pi \text{。}$$

设单位圆的面积为S，单位圆的内接正n边形的面积为S_n'，外切正n边形的面积为S_n''，则$S_n' < S < S_n''$。由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n' = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \pi \text{，}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n'' = \lim_{n\to\infty} n\tan\frac{\pi}{n} = \pi \text{，}$$

可知单位圆的面积等于π。

关于常数π，在《数学分析》课程中包含了许多重要的结果。

例 4
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4} \text{。} \qquad (2)$$

证
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}\text{，}\quad x\in(-1,1)$$

对上式逐项积分，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots=\arctan x\text{，}\qquad x\in(-1,1)\text{。}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$在$x=\pm 1$收敛，由幂级数和函数的连续性，令$x\to 1-$，即得

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4}\text{。}$$

例 5

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6} \tag{3}$$

证 $f(x)=x^2 \quad x\in[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数展开为

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\text{，}$$

令$x=\pi$，就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\text{；}$$

令$x=0$，可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}\text{。} \tag{4}$$

由（3）和（4）还可以导出

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}\quad\text{。} \tag{5}$$

以上这些等式可以用来进行某些特殊的计算，如：$\cos x$的全部零点为$\pm\frac{\pi}{2}$，$\pm\frac{3\pi}{2}$，…，$\pm\frac{(2k-1)\pi}{2}$，… ，而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[\frac{(2k-1)\pi}{2}]^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[-\frac{(2k-1)\pi}{2}]^2}=2\cdot\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=2\cdot\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8}=1\text{，}$$

即$\cos x$全部零点的倒数的平方和恰为 1！

例6 我们用两种方法来求$\ln\frac{\sin x}{x}$的幂级数展开。

（1）利用$\sin x$的幂级数展开，得到

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\text{。}$$

将 $u=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots$ 代入 $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots$，即得到：

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)^2+\cdots$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\cdots\text{。}$$

（2）利用$\sin x$的无穷乘积表示，得到

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

两边取对数，再分别将$\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$展开成幂级数，即得到

$$\ln\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4}+\cdots\right)。$$

将两式相比较，它们的x^2系数，x^4系数都对应相等，于是就得到等

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}\ 。\tag{6}$$

在积分部分，我们也有许多重要而漂亮的结果，如

例 6 （Poisson 积分）

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}。\tag{7}$$

证 设$\mathbf{R}^2=(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$，考虑二重积分

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,dxdy。$$

利用化二重积分为累次积分，可以得到

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,dy=4\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx\right)^2$$

再利用极坐标变换$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$，

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,dxdy=\iint\limits_{\mathbf{D}}\mathrm{e}^{-r^2}\,rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}r\,\mathrm{e}^{-r^2}\,dr=2\pi\int_0^{+\infty}r\,\mathrm{e}^{-r^2}\,dr=\pi\ 。$$

因此得到

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ 。$$

例 7 （Dirichlet 积分）

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}。\tag{8}$$

证明 略

3．常数e和π的无理性

定理2 e是无理数。

证 用反证法。假设e是有理数，那么显而易见，一定存在充分大的自然数m，使得$(m!)e$是正整数。在e^x的Taylor公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \theta \in (0,1)$$

中，将n取为m，并令$x=1$。则有

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \frac{e^{\theta}}{(m+1)!} \qquad \theta \in (0,1)\text{。}$$

两边同乘上$m!$，便得到

$$(m!)e = (m!)\left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}\right] + \frac{(m!)e^{\theta}}{(m+1)!},$$

即

$$(m!)\left\{e - \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}\right]\right\} = \frac{e^{\theta}}{m+1}\text{。}$$

按假设，等式的左端是正整数。

由于$\theta \in (0,1)$，因此$1 < e^{\theta} < 3$，代入上式的右端，就得到估计式

$$\frac{1}{m+1} < \frac{e^{\theta}}{m+1} < \frac{3}{m+1}\text{。}$$

于是，对于任意正整$m \ge 2$，都有$\frac{e^{\theta}}{m+1} \in (0,1)$，也就是说，上述等式的右端决不可能是正整数，这样就导出了矛盾。

所以假设e是有理数不成立，即$\boldsymbol{e}$是无理数。

定理 3 π是无理数。

证 用反证法。假设π是有理数，那么$\pi = \frac{q}{p}$，其中$p, q \in N^+$。设

$$f(x) = \frac{x^n (q - px)^n}{n!},$$

则$f(0) = f(\pi) = 0$，$f^{(2n+2)}(x) \equiv 0$。对于$0 < m \le 2n$，由

$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(x^n\right)^{(k)} \left((q - px)^n\right)^{(m-k)},$$

$$\left(x^n\right)_{x=0}^{(k)} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ n! & k = n \end{cases}，\quad \left((q-px)^n\right)_{x=0}^{(m-k)} = \text{整数} \quad \Rightarrow \quad f^{(m)}(0) = \text{整数}；$$

$$p^n \cdot \left(x^n\right)_{x=\pi}^{(k)} = \text{整数}，\quad \left((q-px)^n\right)_{x=\pi}^{(m-k)} = \begin{cases} 0 & m-k \neq n \\ (-p)^n n! & m-k = n \end{cases} \Rightarrow f^{(m)}(0) = \text{整数}。$$

可知 $f(x)$ 及其直到 $2n+2$ 阶导数在 $x=0$ 与 $x=\pi$ 时取整数值。定义

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)，$$

则 $F(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=\pi$ 时取整数值。由

$$\frac{d}{dx}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x) = (F''(x) + F(x))\sin x = f(x)\sin x，$$

可知

$$\int_0^\pi f(x)\sin x dx = F(0) + F(\pi)$$

是整数。由于当 $0 < x < \pi$ 与 n 充分大时，

$$0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n q^n}{n!} < \frac{1}{\pi}，$$

从而

$$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < 1，$$

产生矛盾，所以 π 是无理数。