数理统计习题

§1 样本与抽样分布

1．设总体 X 服从参数为 $\lambda=2$ 的指数分布，X_1，X_2，…，X_{10} 为 X 的样本，$\bar{X}$ 与 S_n^2 分别为样本均数和样本方差，求 $E(\bar{X})$，$D(\bar{X})$，$E(S_n^2)$。

2．设 X_1，X_2，…，X_n 是来自正态总体 $N(10,2^2)$ 的样本，且 $P(9.02\le\bar{X}\le10.98)=0.95$，求样本容量值。

3．设 $X\sim N(0,1)$，X_1，X_2 是总体 X 的样本，则 $Y=\dfrac{X_1}{X_2}$ 服从什么分布？

4. 设在正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽取一个样本容量为16的样本，算的样本方差为 S^2。

（1）若 σ 未知，求 $P\left(\dfrac{S^2}{\sigma^2}\le2.04\right)$；

（2）若 $\sigma^2=2$，求 S^2 的方差。

5．已知样本 X_1，X_2，…，X_n 的样本均数为 $\bar{X}_n$，样本方差为 S_n^2。在样本中再增加一个 X_{n+1}，证明

（1）$\bar{X}_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}\bar{X}_n+\dfrac{1}{n+1}X_{n+1}$；

（2）$S_{n+1}^2=\dfrac{n-1}{n}S_n^2+\dfrac{1}{n+1}\left(X_{n+1}-\bar{X}_n\right)^2$。

6．设 X_1，X_2，…，X_n 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，令 $Y_i=X_i-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$i=1,2,\cdots,n$，求 Y_i 服从的分布及相应的概率密度函数。

7．设 X_1，X_2，…，X_6 是总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，且 $\dfrac{a(X_1+X_2+X_3)}{\sqrt{X_4+X_5+X_6}}\sim t(b)$，求常数 a，b。

8．设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，X_1，X_2，…，X_n 为 X 的样本，求随机向量（X_1，X_2，…，X_n）的联合分布列。

9．已知 X_1， X_2 是总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，求 $Y=\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$ 的分布。

10．设 X_1， X_2，…， X_n 相互独立，且它们都服从同一个两点分布 $P(X=1)=p$，$P(X=0)=1-p$，证明 $X=X_1+X_2+X_n \sim B(n,\ p)$。

§2 参数估计

1．设总体 X 服从区间 (a,b) 上的均匀分布， X_1， X_2，…， X_n 为 X 的样本，求未知参数 a， b 的矩估计。

2．观察电话总机在 1 分钟内接收到的呼唤次数，共观察 100 次，获得数据如下：

接收到的呼唤次数/分	0	1	2	3	4	5
观察次数	3	18	29	31	14	5

已知电话总机在 1 分钟内接收到的呼唤次数服从参数为 λ 的泊松分布，求 λ 的矩估计量值和极大似然估计。

3．设随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

X_1， X_2，…， X_n 为 X 的样本，求参数 θ 的矩估计。

4．设总体 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\theta\alpha x^{\alpha-1}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$ 为已知常数，$\theta>0$ 为未知参数， X_1， X_2，…， X_n 为 X 的样本，求参数 θ 的极大似然估计。

5．设总体 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{1}{2}\right)$ 未知，求 θ 的矩估计。

6．设一个试验的三种可能结果发生的概率分别为 θ^2， $2\theta(1-\theta)$， $(1-\theta)^2$。现做

了 n 次试验，观察到三种结果发生的次数分别为n_1，n_2，n_3（$n=n_1+n_2+n_3$），求参数θ的矩估计和极大似然估计。

7．设总体X的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\theta}}e^{-\frac{x-\beta}{\sqrt{\theta}}}, & x\geq\beta,\theta>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中β，θ为未知参数，X_1，X_2，…，X_n是来自X的样本，求β，θ的矩估计。

8．设总体$X\sim U(\theta_1,\theta_2)$，$X_1$，$X_2$，…，$X_n$为$X$的样本，求参数$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$的极大似然估计。

9．设总体X服从两点分布$P(X=1)=p$，$P(X=0)=1-p$，$0<p<1$，p未知，X_1，X_2，…，X_n为X的样本，证明$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-X_i)$是$1-p$的无偏估计。

10．设总体X的均数μ和方差σ^2均未知，X_1，X_2为X的样本，证明$\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2$为σ^2的无偏估计。

11．设$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，且有$D(\hat{\theta})>0$，证明$\hat{\theta}^2$不是θ^2的无偏估计。

12．设总体X的均数和方差均分别为μ和σ^2，$\overline{X}_1$和$\overline{X}_2$分别为从总体X中抽取的样本容量分别为n_1和n_2的两个相互独立的样本的样本均数，试证：对任意的常数a，$b(a+b=1)$，$Y=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$ 都是μ的无偏估计，并确定常数a，b取什么数值时，$D(Y)$最有效？

13．某医院用一种中药治疗高血压，记录了 70 列高血压患者治疗前后的舒张压的差数，算的样本均数为-16.28，样本标准差为 10.58.假设舒张压差数服从正态分布，试求舒张压差数的总体均数的 99%置信区间。

14．用某种方法重复测定某水样中的$CaCO_3$含量（单位：mg/L）11 次，测得结果如下：

20.99，20.41，20.10，20.00，20.91，22.60，20.99，20.41，20.00，23.00，22.00。

设$CaCO_3$含量服从正态分布，试求水样中$CaCO_3$含量的总体均数的 95%置信区间和总体方差的 90%置信区间。

15．已知反应时间服从正态分布。在测定反应时间中，一心理学家估计的标准差

是$0.05s$，为了以95%的的置信度使他的平均反应时间的估计误差不超过$0.01s$，应取多大容量的样本？

16．从某批药品中随机抽取10个样品进行储存试验，测得有效期（单位：天）分别为

1450，1480，1640，1610，1500，1600，1420，1530，1700，1500

设该药品有效期服从正态分布，试求总体有效期的95%置信下限。

17．设两个独立总体$X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$的参数均未知。依次抽取样本容量分别为 13 和 10 的两个样本，测得校正的样本方差分别为$S_1^2=8.41$，$S_2^2=5.29$，试求两个总体的总体方差之比的90%置信区间。

18．某实验小组研究采用两种方法研究冰的溶解热，假定采用这两种方法的冰的溶解热都服从正态分布，两个总体的方差虽然未知，但却相等。采用两种方法实验获得从-0.72^0C的冰变成0^0C的水所需热量（卡/克）的观察值。第一种方法做了13次，算得样本均数为80.02，校正的样本标准差为0.023，第二种方法做了8次，算得样本均数为79.98，校正的样本标准差为0.029，试求两个总体均数差值的95%置信区间。

19. 对某事件A作了120次观察，A共发生了36次，试给出事件A发生的概率P的95%置信区间。

§3 假设检验

1．车辆厂生产的螺杆直径服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，现从中抽取5根，测得其直径（单位：毫米）为：22.3，21.5，22.0，21.8，21.4。由此是否可以得到螺杆的直径平均值为21的结论？$(\alpha=0.05)$

2．已知某药厂生产的一种药品的维生素含量在正常情况下服从正态分布$N\left(4.55, 0.1^2\right)$。每天为了控制质量，都要对所生产的产品进行抽样检查。现对所生产的5盒药品进行检测，维生素含量分别为：2.48，4.40，4.42，4.35，4.37。问当前生产是否正常？$(\alpha=0.05)$

3. 设某种弦线的抗拉强度服从均数为1056（单位：千克/平方厘米）的正态分布，近选用新的材料生产该种弦。从新生产的一批弦中随机抽取10根，测得抗拉强度为：

10512，10623，10668，10554，10776，10707，10557，10666，10581，10670。

问这批弦的抗拉强度是否较以往的弦的强度要高？$(\alpha=0.05)$

4．已知某厂生产的铜丝折断力服从正态分布，总体方差为70。今从生产的产品中随机抽取10根，检其折断力，得数据为（单位：千克）：

578，572，570，568，572，570，570，572，596，584。

可否认为该厂生产的铜丝的折断力的方差大于 70？$(\alpha=0.05)$

5．为比较两种安眠药的疗效，将 20 名年龄、病情等大体相同的同性别的失眠患者随机平均分成两组，分别用新旧两种安眠药，测得延长的睡眠时间，经计算得到(单位：小时)：新药组的样本标准差为 2.0022，旧药组的样本标准差为 1.6467。假定两组的睡眠时间都服从正态分布，问两组的总体方差是否齐性？$(\alpha=0.10)$

6．某卷烟厂向化验室送去甲、乙两种烟草，化验尼古丁的含量是否相同。从两种烟草中随机抽取重量相同的 5 例进行化验，测得尼古丁含量为（单位：毫克）：

甲：24，27，26，21，24；

乙：27，28，23，31，26。

根据经验，尼古丁含量服从正态分布，且甲的方差为 5，乙的方差为 8，判断这两种烟草的尼古丁含量是否相同？$(\alpha=0.05)$

7．研究正常成年男女血液的红细胞的平均数（单位：万/立方毫米）差别。已知正常成年男女血液的红细胞数服从正态分布，并且他们的总体方差齐性。现检验某地正常男子 156 名，正常女子 74 名，计算后得到：男性红细胞的平均数为 465.13，样本标准差 54.80；女性红细胞的平均数为 422.16，样本标准差 49.20。问正常男女的红细胞的平均数是否有差异？

8．在 10 块相同的地上种植甲、乙两种不同品种的玉米，得数据（单位：千克）：

甲：951，966，1008，1082，983；

乙：730，864，742，774，990。

已知玉米产量服从正态分布，试问这两种玉米的亩产量有无差异？$(\alpha=0.05)$

9．10 对孪生小白鼠，每对以随机方法指定其中一只饲以生花生，另一只饲以炒花生，最后分别测定其生理价值，数据如下：

小白鼠对子号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
生花生	61	60	56	63	56	59	59	56	60	61
炒花生	55	54	47	59	51	61	57	54	63	58

试比较生花生和炒花生的生理价值有无差异？$(\alpha=0.05)$

10．用煎熬和粗提两种剂型的泡桐果制剂治疗老年慢性气管炎共 415 例，其中煎熬治疗 211 例，有效率为 77.3%；用粗提治疗 204 例，有效率为 95.1%。试问两种剂型的疗效是否有差异？$(\alpha=0.01)$

11．用两种流速生产无水醇，欲比较其含醇率，做配对比较。方法是取一定量的石灰混合均匀后分成两份，分别做两种流速试验，结果如下：

对子号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲种流速含醇率（%）	95	97	94	96	92	92	95	92	86	92
乙种流速含醇率（%）	98	95	98	99	96	96	94	90	89	96

试比较两种流速下的含醇率是否一致？$(\alpha = 0.05)$

12．检验 50 批产品，每批 13 件，计算每批中瑕疵数 X，得数据如下：

瑕疵数 X	0	1	2	3	4	5
样本频数	10	24	10	4	1	1

试判断瑕疵数 X 是否服从泊松分布？$(\alpha = 0.05)$

13．生物学家孟德尔用黄色圆形豌豆与绿色皱皮豌豆做杂交实验，得四种豌豆，结果如下：

豆子分类	圆形黄色豆	圆形绿色豆	皱皮黄色豆	皱皮绿色豆
频数	315	108	101	32

按古典遗传学理论，这四种豌豆的比例应为 9:3:3:1，试判断实验结果是否符合古典遗传学理论？$(\alpha = 0.05)$

14．一项行为学调查记录了 420 人的用手习惯，得到：196 名男性中 29 人爱用左手；224 名女性中 31 人爱用左手。问男女中的“左撇子”现象是否一样？$(\alpha = 0.05)$

15．有三台同样规格的机器，用来生产厚度为 0.25 厘米的铝板。今从各台机器生产的产品中各取 5 件，测其厚度精确至千分之一厘米，结果如下：

A	B	C
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

试问这三台机器所生产的铝板厚度有无差异？$(\alpha = 0.05)$