答案与提示

第十二章 数理统计

§1 样本与抽样分布

1．$E(\overline{X})=\lambda$，$D(\overline{X})=\dfrac{\lambda}{n}$。

2．提示：（1）$\overline{X}_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}\overline{X}_n+\dfrac{1}{n+1}X_{n+1}$；

（2） 利用（1）的结论。

3．$\varphi_{\overline{X}}(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n n^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda nx}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

4．提示：设$X=Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2$，其中$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$相互独立，且都服从$N(0,1)$分布。由于$E(Y_i)=0$，$D(Y_i)=E(Y_i^2)=1$（$i=1,2,\cdots,n$），因此

$$E(X)=E(Y_1^2)+E(Y_2^2)+\cdots+E(Y_n^2)=n。$$

利用分部积分得

$$E\left(Y_i^4\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx=3E\left(Y_i^2\right)=3。$$

所以$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^4)+\sum_{i\neq j}E(Y_i^2)E(Y_j^2)=3n+n(n-1)=n(n+2)$。于是

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2n。$$

5． $C=\dfrac{1}{3}$。

6． $P(\overline{X}-80>3)=0.066807$； $P(|\overline{X}-80|>3)=0.133614$。

7．提示：设$X=\dfrac{Y}{\sqrt{Z/n}}$，其中$Y\sim N(0,1)$，$Z\sim\chi^2(n)$，且Y，Z相互独立。由于$Y^2\sim\chi^2(1)$，因此$X^2=\dfrac{Y^2/1}{Z/n}\sim F(1,n)$。

8．$t(9)$。

9．$F(10,5)$。

10．$t(n-1)$。

11.（1）约为 0.95；（2）$P\left(\max\limits_{1\le i\le 5}\{X_i\}\le 10\right)=0.0001$，$P\left(\min\limits_{1\le i\le 5}\{X_i\}>15\right)=0.0000013$。

§2 参数估计

1．μ 的矩估计量 $\hat{\mu}=\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$。

2．$\hat{\alpha}=3\overline{X}$。

3．$\hat{\theta}_1=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{3(n-1)}{n}}S_n$，$\hat{\theta}_2=\sqrt{\dfrac{12(n-1)}{n}}S_n$，其中 $S_n=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$。

4．矩估计量：$\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$。极大似然估计量：$\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$。

5．矩估计量：$\hat{a}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$。极大似然估计量：$\hat{a}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$。

矩估计值1.33：极大似然估计值：1.55。

6．矩估计量：$\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}$。极大似然估计量：$\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$。

7．$\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}$。

8．$\dfrac{5}{6}$。

9．15000。

10．$\hat{\mu}_2$ 最有效。

11．$k=\dfrac{1}{2(n-1)}$。

12．（1）提示：X 的概率密度为 $\varphi_X(x)=\begin{cases}1, & \theta\le x\le\theta+1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $X_{(n)}$ 的概率密度为

$$\varphi_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}n(x-\theta)^{n-1}, & \theta\le x\le\theta+1,\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

（2）当 $n\ge 8$ 时，θ_2 比 θ_1 有效；当 $1<n\le 7$ 时，θ_1 比 θ_2 有效；$n=1$ 时，$\theta_1=\theta_2$。

13．$(0.99, 1.03)$。

14．（1）$(1498.2645, 1501.7355)$；（2）121。

15．$(5.608, 6.392)$。

16．μ 的置信区间：$(291.38, 307.28)$。σ^2 的置信区间：$(48.8179, 392.71)$。

17．$(-0.002, 0.006)$。

18．（1）$(-72.74, 29.45)$；（2）$(0.1608, 4.1884)$。

§3 假设检验

1．仍为 5cm。

2，合格。

3．不合格。

4．不合格。

5．无显著差异。

6．（1）可以认为方差为 2；（2）可以认为方差小于 3.5。

7．工作正常。

8．有显著影响。

9．可以认为方差相同，但均值不同。

10．有明显变化。

11．甲厂产品的重量方差比乙厂的大。

12．有显著效果。

13．这个正二十面体由均匀材料构成。

14．服从指数分布。