第九章　数项级数

习　题　9.1　数项级数的收敛性

1. 讨论下列级数的收敛性。收敛的话，试求出级数之和。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$;

(9) $\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\theta \quad (|q|<1)$.

解　(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$，所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}。$$

(2) 因为 $\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}\neq 0$，所以级数发散。

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2})$，

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}。$$

(4) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{3^k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$，所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}。$$

(5) 因为 $\lim_{n\to\infty}x_n=1\neq 0$，所以级数发散。

（6） $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{5^{k-1}+4^{k+1}}{3^{2k}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1-\frac{5}{9}}+\frac{16}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$，所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=3\frac{9}{20}。$$

（7） $S_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1$，所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\sqrt{2}+1。$$

（8）设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^k}$，则 $3S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^{k-1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{3^k}$，两式相减，得到

$$2S_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3^k}-\frac{2n-1}{3^n}=1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^n},$$

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1\ ;$$

（9） $\sum_{k=0}^{n}q^k e^{ik\theta}=\frac{1-\left(qe^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-qe^{i\theta}}$，由 $|q|<1$，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n e^{in\theta}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}q^k e^{ik\theta}=\frac{1}{1-qe^{i\theta}}。$$

利用 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，对上式两边取实部，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\theta=\frac{1-q\cos\theta}{1-2q\cos\theta+q^2}。$$

2．确定 x 的范围，使下列级数收敛。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-x)^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{nx}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$.

解　（1）由 $-1<\frac{1}{1-x}<1$ 解得 $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$。

（2）由 $e^x<1$ 解得 $x\in(-\infty,0)$。

（3）当 $x=1$ 时显然级数收敛；当 $x\neq 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)=(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ ，收敛范围是 $x\in(-1,1)$ ；所以当 $x\in(-1,1]$ 时级数收敛。

3．求八进制无限循环小数（36.0736073607 ⋯ ）$_8$ 的值。

解　$(36.0736073607\ldots)_8$

$$=3\times 8+6+\sum_{n=0}^{\infty}\left[7\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+2}+3\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+3}+6\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+4}\right]=30\frac{478}{4095}。$$

4．设 $x_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n dx$ ，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的和。

解　$x_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^2 dx=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}$，

于是

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} x_k=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}，$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{6}。$$

5. 设抛物线 l_n ： $y=nx^2+\dfrac{1}{n}$ 和 l_n' ： $y=(n+1)x^2+\dfrac{1}{n+1}$ 的交点的横坐标的绝对值为 a_n （$n=1,2,\cdots$）。

(1) 求抛物线 l_n 与 l_n' 所围成的平面图形的面积 S_n ；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{S_n}{a_n}$ 的和。

解　(1) 容易求出抛物线 l_n ： $y=nx^2+\dfrac{1}{n}$ 和 l_n' ： $y=(n+1)x^2+\dfrac{1}{n+1}$ 的交点的横坐标的绝对值为 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，于是

$$S_n=2\int_0^{a_n}\left[\left(nx^2+\frac{1}{n}\right)-\left((n+1)x^2+\frac{1}{n+1}\right)\right]dx=\frac{4}{3}{a_n}^3；$$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=\dfrac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{4}{3}$。

习　题　9.2　上极限与下极限

1. 求下列数列的上极限与下极限

(1) $x_n = \frac{n}{2n+1}\cos\frac{2n\pi}{5}$；　　(2) $x_n = n + (-1)^n \frac{n^2+1}{n}$；

(3) $x_n = -n[(-1)^n + 2]$；　　(4) $x_n = \sqrt[n]{n+1} + \sin\frac{n\pi}{3}$；

(5) $x_n = 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

解（1）$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \frac{1}{2}$，$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}$。

（2）$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$，$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0$。

（3）$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty$，$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty$。

（4）$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$。

（5）$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 5$，$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -5$。

2. 证明：

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n) = -\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$；　　(2) $\overline{\lim_{n\to\infty}}(cx_n) = \begin{cases} c\,\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n, & c>0, \\ c\,\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n, & c<0. \end{cases}$

证　仅对$\{x_n\}$是有界数列给出证明。

（1）设$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \eta$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得$x_n > \eta-\varepsilon$对一切 $n>N$ 成立，且$\{x_n\}$中有无穷多项，满足$x_n < \eta+\varepsilon$；于是$-x_n < -\eta+\varepsilon$ 对一切 $n>N$ 成立，且$\{-x_n\}$中有无穷多项，满足$-x_n > -\eta-\varepsilon$；于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n) = -\eta = -\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n 。$$

（2）设$c>0$，$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \xi$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得$x_n < \xi+\frac{\varepsilon}{c}$对一切$n>N$成立，且$\{x_n\}$中有无穷多项，满足$x_n > \xi-\frac{\varepsilon}{c}$；于是$cx_n < c\xi+\varepsilon$对一切 $n>N$ 成立，且$\{cx_n\}$中有无穷多项，满足$cx_n > c\xi-\varepsilon$；所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(cx_n) = c\xi = c\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n 。$$

设$c<0$，$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \eta$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得

$x_n > \eta + \frac{\varepsilon}{c}$ 对一切 $n>N$ 成立，且 $\{x_n\}$ 中有无穷多项，满足 $x_n < \eta - \frac{\varepsilon}{c}$；于是 $cx_n < c\eta + \varepsilon$ 对一切 $n > N$ 成立，且 $\{cx_n\}$ 中有无穷多项，满足 $cx_n > c\xi - \varepsilon$；所以

$$\varlimsup_{n\to\infty}(cx_n) = c\eta = c\varliminf_{n\to\infty} x_n \text{。}$$

3. 证明：

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geq \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \text{。}$$

证 （1）记 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = h_1$， $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = h_2$，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，对一切 $n>N$，成立 $x_n > h_1 - \frac{\varepsilon}{2}$， $y_n > h_2 - \frac{\varepsilon}{2}$，即

$$x_n + y_n > h_1 + h_2 - \varepsilon \text{，}$$

于是

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geq h_1 + h_2 - \varepsilon \text{。}$$

由 ε 的任意性，即得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geq h_1 + h_2 = \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \text{。}$$

（2）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则由（1），

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geq \lim_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \text{，}$$

且

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} y_n &= \varliminf_{n\to\infty}\,[(x_n + y_n) - x_n] \geq \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) + \varliminf_{n\to\infty}(-x_n) \\ &= \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) - \lim_{n\to\infty} x_n \text{，}\end{aligned}$$

两式结合即得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \text{。}$$

4. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$， $-\infty < x < 0$，则

（1） $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n\, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$；

（2） $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n\, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$。

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$， $-\infty < x < 0$，可知对任意给定的 ε $(0 < \varepsilon < -x)$，存在正整数 N_1，对一切 $n > N_1$，成立

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon < 0 \text{。}$$

记 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n = H$， $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = h$，则对上述 ε $(0 < \varepsilon < -x)$，存在正整数 N_2，对

一切 $n > N_2$，成立

$$h-\varepsilon < y_n < H+\varepsilon \text{。}$$

取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，则当 $n>N$ 时，成立

$$\min\{(x-\varepsilon)(H+\varepsilon),(x+\varepsilon)(H+\varepsilon)\} < x_n y_n < \max\{(x-\varepsilon)(h-\varepsilon),(x+\varepsilon)(h-\varepsilon)\}\text{，}$$

于是

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \ge \min\{(x-\varepsilon)(H+\varepsilon),(x+\varepsilon)(H+\varepsilon)\}\text{，}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \le \max\{(x-\varepsilon)(h-\varepsilon),(x+\varepsilon)(h-\varepsilon)\}\text{，}$$

由 ε 的任意性，即得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \ge xH = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n\text{，}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \le xh = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n\text{。}$$

由于

$$\varliminf_{n\to\infty} y_n = \varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}\cdot(x_n y_n)\right] \ge \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n)\text{，}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} y_n = \varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}\cdot(x_n y_n)\right] \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n)\text{，}$$

又得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \le \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n\text{，}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\ y_n) \ge \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n\text{。}$$

将此两式与前面两式结合，即得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\ y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n\ y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n\text{。}$$