习 题 5.5 应用举例

1. 求下列函数的极值点，并确定它们的单调区间：

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$;

(2) $y = x + \sin x$;

(3) $y = \sqrt{x} \ln x$;

(4) $y = x^n \mathrm{e}^{-x}$ （$n \in \mathrm{N}^+$）；

(5) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x-2}}$;

(6) $y = \dfrac{1-x}{1+x^2}$;

(7) $y = 3x + \dfrac{4}{x}$;

(8) $y = x - \ln(1+x)$;

(9) $y = \cos^3 x + \sin^3 x$;

(10) $y = \arctan x - x$;

(11) $y = 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$;

(12) $y = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

(13) $y = \dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(14) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

解（1）因为$y'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$有两个零点$-1, 2$，根据一阶导数的符号，可知函数在$(-\infty,-1]$和$[2,+\infty)$单调增加，在$[-1,2]$单调减少，所以$x=-1$是极大值点， $x = 2$是极小值点。

（2）因为$y'(x) = 1 + \cos x \ge 0$，函数在$(-\infty,+\infty)$严格单调增加，无极值点。

（3） $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2 + \ln x)$有零点$e^{-2}$，根据一阶导数的符号可知函数在$(0, e^{-2}]$单调减少，在$[e^{-2}, +\infty)$单调增加，所以$x = e^{-2}$是极小值点。

（4） $y'(x) = (n-x)x^{n-1}e^{-x}$有零点$0$和$n$，

当n是偶数时，函数在$(-\infty,0]$和$[n,+\infty)$单调减少，在$[0,n]$单调增加，所以$x = 0$是极小值点， $x = n$是极大值点；

当n是奇数时，函数在$(-\infty, n]$单调增加，在$[n,+\infty)$单调减少，所以$x = n$是极大值点。

（5） y 和 y^3 具有相同的单调性，$\frac{d(y^3)}{dx}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$ 有零点 $x=-1,5$，$x=-1$ 是不可导点。根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,-1]$ 和 $[5,+\infty)$ 单调增加，在 $[-1,2)$ 和 $(2,5]$ 单调减少，所以 $x=-1$ 是极大值点， $x=5$ 是极小值点。

（6） $y'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$ 有零点 $x=1\pm\sqrt{2}$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,1-\sqrt{2}]$ 和 $[1+\sqrt{2},+\infty)$ 单调增加，在 $[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$ 单调减少，所以 $x=1-\sqrt{2}$ 是极大值点， $x=1+\sqrt{2}$ 是极小值点。

（7） $y'(x)=3-\frac{4}{x^2}$ 有零点 $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}}]$ 和 $[\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty)$ 单调增加，在 $[-\frac{2}{\sqrt{3}},0)$ 和 $(0,\frac{2}{\sqrt{3}}]$ 单调减少，所以 $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 是极大值点， $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 是极小值点。

（8） $y'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$ 有零点 $x=0$，函数在 $x=-1$ 不可导，根据一阶导数的符号，可知函数在 $[0,+\infty)$ 单调增加，在 $(-1,0]$ 单调减少，所以 $x=0$ 是极小值点。

（9） $y'(x)=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$ 有零点 $x=\frac{k\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{4}$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$， $[2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{5\pi}{4}]$ 和 $[2k\pi+\frac{3\pi}{2},2k\pi+2\pi]$ 单调增加，在 $[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}]$， $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi]$ 和 $[2k\pi+\frac{5\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$ 单调减少，所以 $x=2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2},(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$ 是极大值点， $x=2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\pi,(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$， $k\in Z$ 是极小值点。

（10） $y'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{x^2}{1+x^2}\le 0$，函数在 $(-\infty,+\infty)$ 严格单调减少，所以

没有极值点。

（11） $y'(x)=2e^{x}-e^{-x}=(2e^{2x}-1)e^{-x}$有零点$x=-\frac{1}{2}\ln 2$，根据一阶导数的符号，可知函数在$[-\frac{1}{2}\ln 2,+\infty)$单调增加，在 $(-\infty,-\frac{1}{2}\ln 2]$单调减少，所以$x=-\frac{1}{2}\ln 2$是极小值点。

（12） $y'(x)=-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$， $x=1$是不可导点，根据一阶导数的符号，可知函数在$(-\infty,1]$单调增加，在$[1,+\infty)$单调减少，所以$x=1$是极大值点。

（13） $y'(x)=\frac{12-5x}{(4+5x^{2})^{\frac{3}{2}}}$有零点$x=\frac{12}{5}$，根据一阶导数的符号，可知函数在$(-\infty,\frac{12}{5}]$单调增加，在$[\frac{12}{5},+\infty)$单调减少，所以$x=\frac{12}{5}$是极大值点。

（14） $y'(x)=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^{2}}$有零点$x=e$，根据一阶导数的符号，可知函数在$(0,e]$单调增加，在$[e,+\infty)$单调减少，所以$x=e$是极大值点。

2. 求下列曲线的拐点，并确定函数的保凸区间：

(1) $y=-x^{3}+3x^{2}$；　　(2) $y=x+\sin x$；

(3) $y=\sqrt{1+x^{2}}$；　　(4) $y=x\,\mathrm{e}^{-x}$；

(5) $y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)^{2}}{x-2}}$；　　(6) $y=\frac{1-x}{1+x^{2}}$；

(7) $y=x-\ln(1+x)$；　　(8) $y=\arctan x-x$；

(9) $y=(x+1)^{4}+\mathrm{e}^{x}$；　　(10) $y=\ln(1+x^{2})$；

(11) $y=\mathrm{e}^{\arctan x}$；　　(12) $y=x+\sqrt{x-1}$.

解 （1） $y'(x)=-3x^{2}+6x, y''(x)=-6x+6$，二阶导数有零点$x=1$，根据二阶导数的符号，可知点$(1,2)$是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,1]$下凸，$[1,+\infty)$上凸。

（2） $y'(x)=1+\cos x, y''(x)=-\sin x$，二阶导数有零点 $x=k\pi, k\in Z$，根据二阶导数的符号，可知点 $(k\pi,k\pi),\ k\in Z$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 上凸，$[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 下凸。

（3） $y'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, y''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x^2}{(\sqrt{1+x^2})^3}=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}>0$，所以曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,+\infty)$ 下凸。

（4） $y'(x)=(1-x)e^{-x}, y''(x)=(x-2)e^{-x}$，二阶导数有零点 $x=2$，根据二阶导数的符号，可知点 $(2,\dfrac{2}{e^2})$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,2]$ 上凸，$[2,+\infty)$ 下凸。

（5） $y'(x)=\dfrac{(x-5)}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{4}{3}}$，$y''(x)=\dfrac{-2(x^2-10x-2)}{9(x+1)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{7}{3}}}$，二阶导数有零点 $x=5\pm3\sqrt{3}$，根据二阶导数的符号，可知点 $\left(5\pm3\sqrt{3},\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}(1\pm\sqrt{3})\right)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,5-3\sqrt{3}]$ 和 $(2,5+3\sqrt{3}]$ 下凸，$[5-3\sqrt{3},2)$ 和 $[5+3\sqrt{3},+\infty)$ 上凸。

（6） $y'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}, y''(x)=\dfrac{-2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$，二阶导数有零点 $x=-1, 2\pm\sqrt{3}$，根据二阶导数的符号，可知点 $(-1,1),\ \left(2\pm\sqrt{3},\dfrac{1}{4}(1\mp\sqrt{3})\right)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,-1]$ 和 $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$ 下凸，$[2+\sqrt{3},+\infty)$ 和 $[-1,2-\sqrt{3}]$ 上凸。

（7） $y'(x)=1-\frac{1}{1+x}, y''(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$，曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$(-1,+\infty)$ 下凸。

（8） $y'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1, y''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，二阶导数有零点 $x=0$，根据二阶导数的符号，可知点 $(0,0)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,0]$ 下凸，$[0,+\infty)$ 上凸。

（9） $y''(x)=12(x+1)^2+e^x>0$，曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,+\infty)$ 下凸。

（10） $y'(x)=\frac{2x}{1+x^2}, y''(x)=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$，二阶导数有零点 $x=\pm 1$，根据二阶导数的符号，可知点 $(\pm 1,\ln 2)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上凸，$[-1,1]$ 下凸。

（11） $y'(x)=e^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}, y''(x)=e^{\arctan x}\frac{1-2x}{(1+x^2)^2}$，二阶导数有零点 $x=\frac{1}{2}$，根据二阶导数的符号，可知点 $\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$ 是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,\frac{1}{2}]$ 下凸，$[\frac{1}{2},+\infty)$ 上凸。

（12） $y'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}, y''(x)=-\frac{1}{4(x-1)^{\frac{3}{2}}}<0$，曲线没有拐点；

函数的保凸区间：$[1,+\infty)$ 上凸。

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，证明：$f(x)$ 在 x_0 处取到极大值（极小值）的必要条件是 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)\le 0$ （$f''(x_0)\ge 0$）。

证 先设 $f(x)$ 在 x_0 处取到极大值，则由于 $f(x)$ 在 x_0 处可导，所以 $f'(x_0)=0$。若 $f''(x_0)>0$，则由

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$
$$=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\text{，}$$

可知当$x\neq x_0$充分接近x_0时，有$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}>0$，与$f(x)$在$x_0$处取到极大值矛盾，所以$f''(x_0)\le 0$。

$f(x)$在x_0处取到极小值的情况可同样证明。

4. 设$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$，$\varphi(x)$在$x=a$连续且$\varphi(a)\neq 0$，讨论$f(x)$在$x=a$处的极值情况。

解 首先有$f(a)=0$。

当 n 为偶数时$(x-a)^n\ge 0$，当$\varphi(a)>0$时，$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$在$x=a$附近非负，所以$x=a$为函数$f(x)$的极小值点；而当$\varphi(a)<0$时，函数$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$在$x=a$附近非正，所以$x=a$为函数的极大值点。

当 n 为奇数时$(x-a)^n$在$x=a$附近变号，$\varphi(a)\neq 0$，$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$在$x=a$附近也变号，所以$x=a$非极值点。

5. 设$f(x)$在$x=a$处有n阶连续导数，且$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$，$f^{(n)}(a)\neq 0$，讨论$f(x)$在$x=a$处的极值情况。

解 $f(x)=f(a)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$，$\xi$位于$0$与$x$之间。由于$f(x)$在$x=a$处有$n$阶连续导数，$f^{(n)}(a)\neq 0$，所以当$x$位于$x=a$附近，$f^{(n)}(\xi)$不变号，利用上题的结果可知：

当 n 为偶数时，若$f^{(n)}(a)>0$，则$x=a$为函数$f(x)$的极小值点；若$f^{(n)}(a)<0$，则$x=a$为函数$f(x)$的极大值点。

当 n 为奇数时，$x=a$不是函数$f(x)$的极值点。

6．如何选择参数 $h>0$，使得

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

在 $x=\pm\sigma$ （$\sigma>0$ 为给定的常数）处有拐点？

解 $y'(x)=\frac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}, y''(x)=\frac{-2h^3(1-2h^2x^2)}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$，可知曲线在 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}h}$ 处有拐点，所以取 $h=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ 即可。

7．求 $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ 在拐点处的切线方程。

解 $y'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}, y''(x)=\frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$，可知 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$ 是曲线的拐点，由于 $y'\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}$，得到在拐点处曲线的切线方程为

$$y-\frac{1}{4}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}(x\mp\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

即：$3\sqrt{3}x-8y-1=0$ 和 $3\sqrt{3}x+8y-5=0$。

8．作出下列函数的图象（渐近线方程可利用上一节习题 8 的结果）：

(1) $y=\frac{x^2}{1+x}$；　　(2) $y=\frac{2x}{1+x^2}$；

(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$；　　(4) $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$；

(5) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；　　(6) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$；

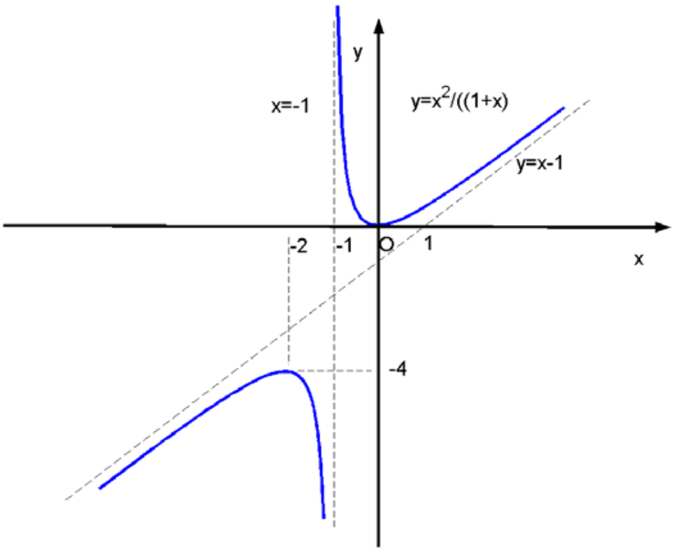
(7) $y=x+\operatorname{arccot}x$；　　(8) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$；

(9) $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 (1) $y=\frac{x^2}{1+x}$， $y'=\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}$, $y''=\frac{2}{(1+x)^3}$。

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	—	无定义	—	0	$+$
y''	—	—	—	无定义	$+$	$+$	$+$
y	↗	极大值 -4	↘	无定义	↘	极小值 0	↗

渐近线为 $y=x-1$ 和 $x=-1$。

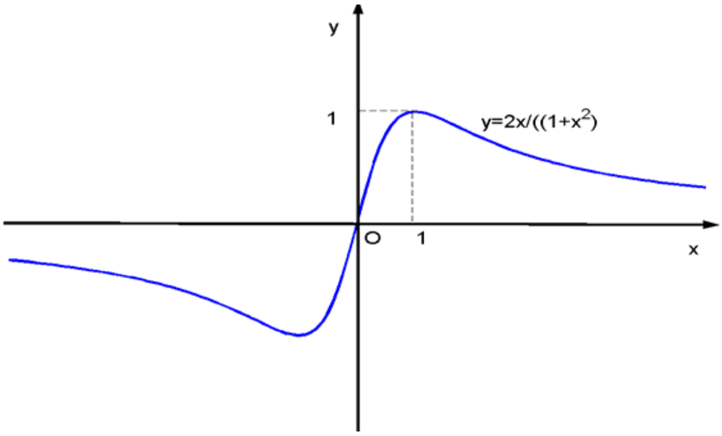


(2) 因为 y 为奇函数,只要考虑 $x\ge 0$ 的情况。

$$y=\frac{2x}{1+x^2}，\quad y'=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},\quad y''=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}。$$

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	$+$	$+$	0	—	—	—
y''	—	—	-1	—	0	$+$
y	0	↗	极大值 1	↘	拐点 $(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$	↘

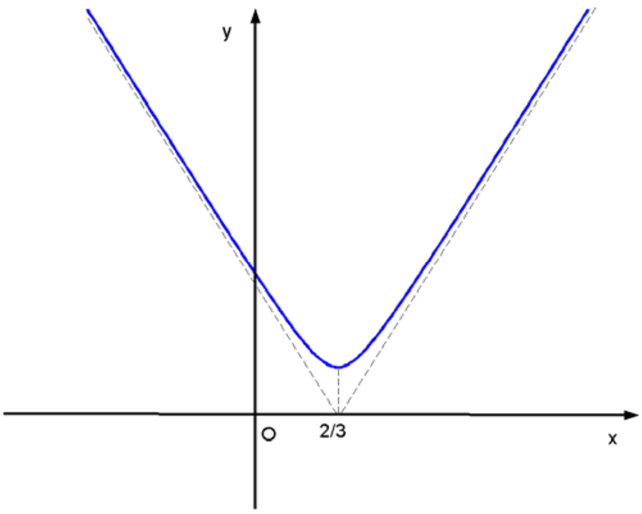
渐近线是 $y=0$。



(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$， $y'=\dfrac{6x-4}{\sqrt{6x^2-8x+3}}$， $y''=\dfrac{2}{\sqrt{(6x^2-8x+3)^3}}$。

x	$(-\infty,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	↘	极小值 $\frac{1}{\sqrt{3}}$	↗

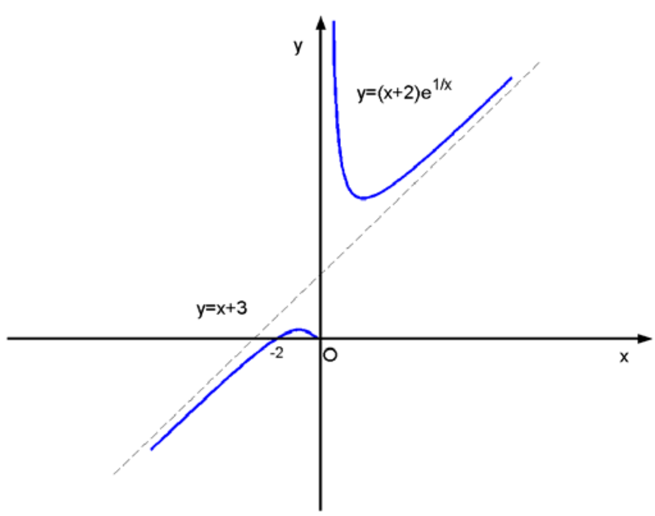
渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 和 $y=-\sqrt{6}x+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。



(4) $y=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$， $y'=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$， $y''=\dfrac{5x+2}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{2}{5})$	$-\frac{2}{5}$	$(-\frac{2}{5},0)$	0	$(0,2)$	2	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	−	−	无定义	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	无定义	+	+	+
y	↗	极大值 e^{-1}	↘	拐点 $(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$	↘	无定义	↘	极小值 $4e^{\frac{1}{4}}$	↗

渐近线为 $y=x+3$ 和 $x=0$。

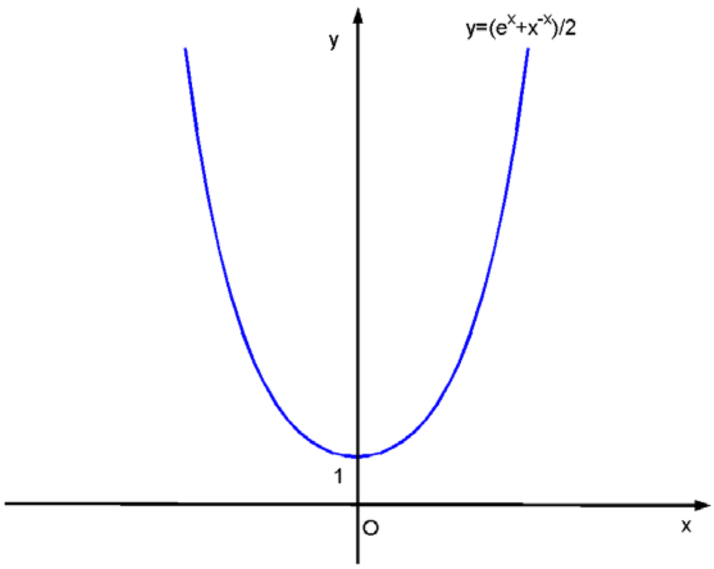


(5) 由于 y 为偶函数，只要考虑 x>0 情况。

$y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$，$y'=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$，$y''=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$-$	1	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	↘	极小值 1	↗

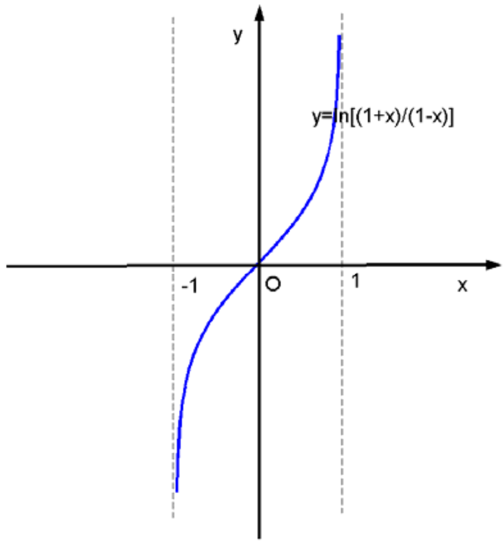
无渐近线。



（6） $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，$y'=\dfrac{2}{1-x^{2}}$，$y''=\dfrac{4x}{(1-x^{2})^{2}}$。

x	$(-1,0)$	0	$(0,1)$
y'	$+$	2	$+$
y''	$-$	0	$+$
y	↗	拐点（0,0）	↗

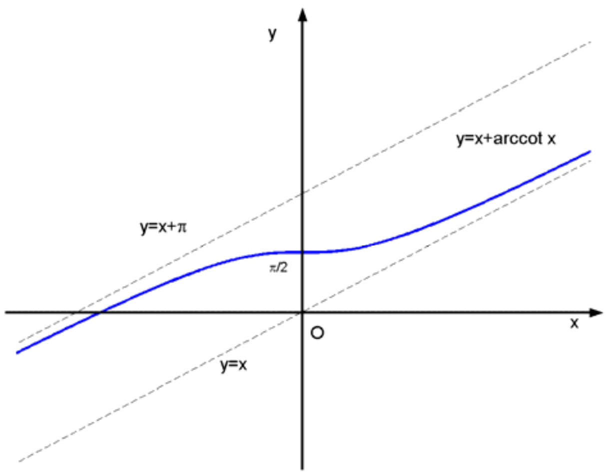
$x=\pm 1$为两条垂直渐近线。



(7) $y = x + \operatorname{arccot} x$，$y' = \dfrac{x^2}{1+x^2}$， $y'' = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$。

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	+
y''	−	+	+
y	↗	拐点 $(0, \frac{\pi}{2})$	↗

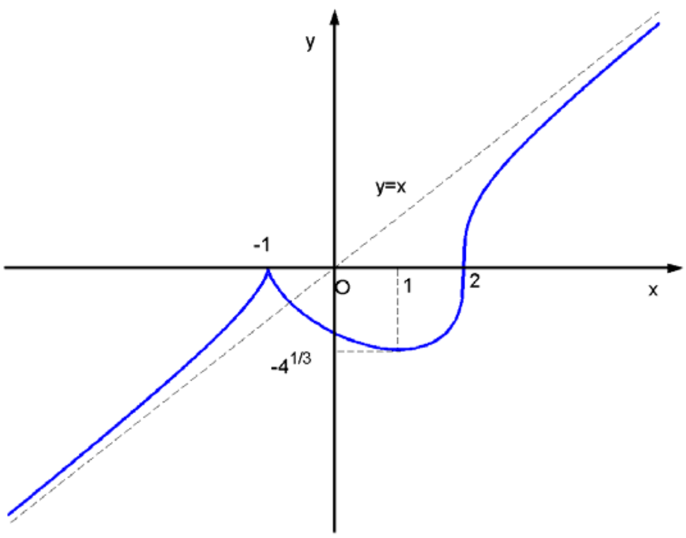
渐近线为 $y = x$ 和 $y = x + \pi$。



（8） $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$， $y'=\dfrac{x-1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}$， $y''=\dfrac{-2}{(x-2)^{\frac{5}{3}}(x+1)^{\frac{4}{3}}}$。

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	无定义	−	0	+	无定义	+
y''	+	无定义	+	无定义	+	无定义	−
y	↗	极大值 0	↘	极小值 $-\sqrt[3]{4}$	↗	拐点 (2,0)	↗

渐近线为 $y=x$。

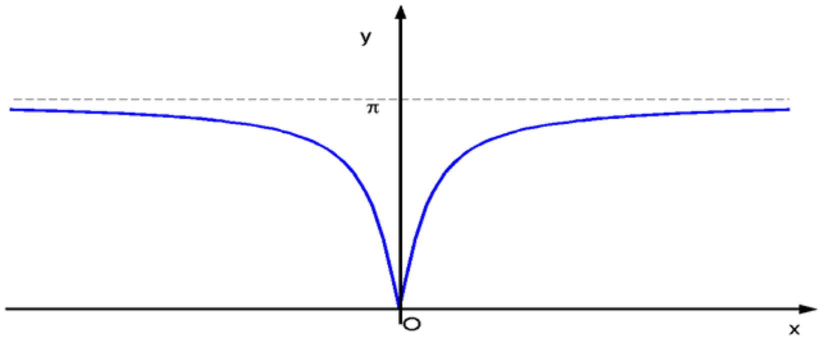


（9） $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 是偶函数。 $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{2\operatorname{sgn}(x)}{1+x^2},\quad y''=-\frac{4x\operatorname{sgn}(x)}{(1+x^2)^2}。$$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	—	无定义	+
y''	—	无定义	—
y	↘	极小值 0	↗

渐近线为 $y=\pi$。



9．求下列数列的最大项：

(1) $\left\{\frac{n^{10}}{2^n}\right\}$；　　(2) $\{\sqrt[n]{n}\}$.

解（1）令 $f(x)=\frac{x^{10}}{2^x}$，则 $f'(x)=\frac{x^9}{2^x}(10-\ln 2\cdot x)$，$f(x)$ 的极大值点为 $\frac{10}{\ln 2}\approx 14.4$，且 $f(14)-f(15)\approx 56730>0$，所以最大项对应 $n=14$；

（2）令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，则 $f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\frac{(1-\ln x)}{x^2}$，极大值点为 $x=e$，而 $f(2)-f(3)<0$，所以最大项对应 $n=3$。

10．设 a,b 为实数，证明

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}。$$

证 对于函数$y=\frac{x}{1+x}$，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1+x)^2}>0$，函数 y 单调增加，所以

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}。$$

11．设$a>\ln 2-1$为常数，证明当$x>0$时，

$$x^2-2ax+1<e^x。$$

证 令$f(x)=e^x-(x^2-2ax+1)$，则

$$f'(x)=e^x-2x+2a，\quad f''(x)=e^x-2。$$

由于在$(0,\ln 2)$上$f''(x)<0$，$f'(x)$在$[0,\ln 2]$严格单调减少；在$(\ln 2,+\infty)$上$f''(x)>0$，$f'(x)$在$[\ln 2,+\infty)$严格单调增加。所以$x=\ln 2$为$f'(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值点。由于$f'(\ln 2)=2-2\ln 2+2a>0$，所以$f'(x)>0,\ \forall x>0$。再由$f(0)=0$，得到$f(x)>0,\ \forall x>0$，证毕。

12．设$k>0$，试问当k为何值时，方程$\arctan x-kx=0$有正实根？

解 令$f(x)=\arctan x-kx$，则

$$f(0)=0,\ f(+\infty)=-\infty,\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-k。$$

当$k\ge 1$时，$f'(x)<0\ (x\ne 0)$，所以$f(x)$严格单调减少，由$f(0)=0$可知方程无正实根；当$0<k<1$时，$f'(0)>0$，所以当$x>0$很小时$f(x)>0$，由连续函数的零点存在定理，可知方程必有正实根。

13．对a作了n次测量后获得了n个近似值$\{a_k\}_{k=1}^n$，现在要取使得

$$s=\sum_{k=1}^n(a_k-\xi)^2$$

达到最小的ξ作为a的近似值，ξ应如何取？

解 由

$$\frac{ds}{d\xi}=\sum_{k=1}^{n}-2(a_k-\xi)=-2(\sum_{k=1}^{n}a_k-n\xi)=0,$$

可得$\xi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$，这就是使$s$达到最小的$a$的近似值。

14．证明：对于给定了体积的圆柱形，当它的高与底面的直径相等的时候表面积最小。

证 设圆柱体的底面半径为r，高为h，则圆柱体的体积$V=\pi r^2 h$。其表面积为

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi(r^2+\frac{V}{\pi r}),$$

$$\frac{dS}{dr}=2\pi(2r-\frac{V}{\pi r^2})=0。$$

求解上述方程，得到

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\quad h=\frac{V}{\pi r^2}=2r,$$

此时圆柱体的表面积最小，证毕。

15． 在底为a高为h的三角形中作内接矩形，矩形的一条边与三角形的底边重合，求此矩形的最大面积？

解 设矩形的底边（与三角形底边重合者）长为x，高为y，由

$$\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h},$$

可知矩形面积为

$$S=xy=\frac{a}{h}(h-y)y,$$

$$\frac{dS}{dy}=\frac{a}{h}(h-2y)=0,$$

解得

$$y=\frac{h}{2},x=\frac{a}{2},$$

所以当 $y=\frac{h}{2}, x=\frac{a}{2}$ 时，矩形面积最大，最大面积为 $S=\frac{ah}{4}$。

16．求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，边与椭圆的轴平行的面积最大的矩形。

解 设矩形的长与宽分别为 $2x$ 与 $2y$，则 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，矩形的面积为

$$S=4xy=\frac{4bx\sqrt{a^2-x^2}}{a}，$$

$$\frac{dS}{dx}=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)=0，$$

解得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{2}}$，所以当矩形的边长分别为 $\sqrt{2}a$ 与 $\sqrt{2}b$ 时，内接矩形的面积最大。

17．将一块半径为 r 的圆铁片剪去一个圆心角为 θ 的扇形后做成一个漏斗，问 θ 为何值时漏斗的容积最大？

解 可以求得漏斗的底面半径为 $\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}$，高度为

$$\sqrt{r^2-\left[\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}\right]^2}=\frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}，$$

所以漏斗的容积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}\right]^2\cdot\frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}=\frac{r^3}{24\pi^2}(2\pi-\theta)^2\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}，$$

$$\frac{dV}{d\theta}=\frac{r^3(2\pi-\theta)}{24\pi^2\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}}(3\theta^2-12\pi\theta+4\pi^2)=0，$$

上式关于 θ 在 $(0, 2\pi)$ 中有唯一解

$$\theta=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)，$$

这就是使漏斗容积最大的角度 θ。

18. 要做一个容积为 V 的有盖的圆柱形容器，上下两个底面的材料价格为每单位面积 a 元，侧面的材料价格为每单位面积 b 元，问直径与

高的比例为多少时造价最省？

解 设圆柱形容器的底面直径为 D，高为 H。则容积$V=\frac{1}{4}\pi D^2H$，造价为

$$P=\frac{2}{4}\pi D^2a+\pi DHb=\frac{1}{2}\pi D^2a+\frac{4Vb}{D},$$
$$\frac{dP}{dD}=\pi Da-\frac{4Vb}{D^2}=0,$$

解得

$$D=\sqrt[3]{\frac{4Vb}{\pi a}},\quad H=\frac{4V}{\pi D^2},$$

这时$\frac{D}{H}=\frac{\pi D^3}{4V}=\frac{b}{a}$，所以，当直径与高的比例为$\frac{b}{a}$时造价最省。

19． 要建造一个变电站 M 向 A、B 两地送电（图 5.5.6），M 与 A 之间的电缆每千米a元，与 B 之间的电缆每千米b元，为使总投资最小，问变电站 M 的位置应满足什么性质？

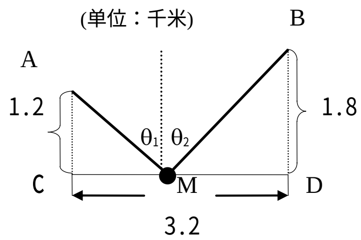


图 5.5.6

解 设 C 与 M 之间距离为 x，则

$$|AM|=\sqrt{x^2+1.2^2},\quad |BM|=\sqrt{(3.2-x)^2+1.8^2},$$

变电站的总投资为

$$\begin{aligned}P&=a|AM|+b|BM|\\&=a\sqrt{1.44+x^2}+b\sqrt{3.24+(3.2-x)^2},\end{aligned}$$

由

$$\frac{dP}{dx}=\frac{ax}{|AM|}-\frac{b(3.2-x)}{|BM|}=0,$$

得到

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\frac{|CM|}{|AM|}}{\frac{|DM|}{|BM|}}=\frac{b}{a}\text{，}$$

这就是变电站 M 的位置应满足的性质。