习 题 12.5　偏导数在几何中的应用

1．　求下列曲线在指定点处的切线与法平面方程：

（1）$\begin{cases} y = x^2, \\ z = \dfrac{x}{1+x}. \end{cases}$ 在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点；

（2）$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 4\sin\dfrac{t}{2}. \end{cases}$ 在$t = \dfrac{\pi}{2}$的点；

（3）$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$ 在$(1,-2,1)$点；

（4）$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x^2 + z^2 = R^2. \end{cases}$ 在$\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$点。

解　（1）曲线的切向量函数为$(1, 2x, \dfrac{1}{(1+x)^2})$，在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点的切向量为$(1, 2, \dfrac{1}{4})$。于是曲线在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点的切线方程为

$$2(x-1) = y-1 = 4(2z-1)，$$

法平面方程为

$$8x + 16y + 2z = 25。$$

（2）曲线的切向量函数为$(1-\cos t, \sin t, 2\cos\dfrac{t}{2})$，在$t = \dfrac{\pi}{2}$对应点的切向量为$(1,1,\sqrt{2})$。于是曲线在$t = \dfrac{\pi}{2}$对应点的切线方程为

$$x - \frac{\pi}{2} + 1 = y - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} z - 2，$$

法平面方程为

$$(x - \frac{\pi}{2} + 1) + (y-1) + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0。$$

（3）曲线的切向量函数为$2(y-z, z-x, x-y)$，在$(1,-2,1)$点的切向量为$(-6, 0, 6)$。于是曲线在$(1,-2,1)$点的切线方程为

$$\begin{cases} x+z=2 \\ y=-2 \end{cases},$$

法平面方程为

$$x=z。$$

（4）曲线的切向量函数为$4(yz,-xz,-xy)$，在$\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$点的切向量为$2R^2(1,-1,-1)$。于是曲线在$\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$点的切线方程为

$$x-\frac{R}{\sqrt{2}}=-y+\frac{R}{\sqrt{2}}=-z+\frac{R}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$x-y-z+\frac{\sqrt{2}}{2}R=0。$$

2.在曲线$x=t,y=t^2,z=t^3$上求一点，使曲线在这一点的切线与平面$x+2y+z=10$平行。

解 曲线的切向量为$(1,2t,3t^2)$，平面的法向量为$(1,2,1)$，由题设，

$$(1,2t,3t^2)\cdot(1,2,1)=1+4t+3t^2=0,$$

由此解出$t=-1$或$-\frac{1}{3}$，于是

$$(-1,1,-1) \text{ 和 } (-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27})$$

为满足题目要求的点。

3. 求曲线$x=\sin^2 t,\ y=\sin t\cos t,\ z=\cos^2 t$在$t=\frac{\pi}{2}$所对应的点处的切线的方向余弦。

解曲线的切向量函数为$(\sin 2t,\cos 2t,-\sin 2t)$，将$t=\frac{\pi}{2}$代入得$(0,-1,0)$，它是单位向量，所以是方向余弦。

4. 求下列曲面在指定点的切平面与法线方程：

（1） $z=2x^4+3y^3$，在点$(2,1,35)$；

（2） $\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}+\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}=4$，在点$(\ln 2,\ln 2,1)$；

（3） $x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3$，在点$u=0,v=1$所对应的点。

解（1）曲面的法向量函数为$(8x^3,9y^2,-1)$，以$(x,y,z)=(2,1,35)$代入，得

到$(64,9,-1)$，所以切平面方程为

$$64(x-2)+9(y-1)-(z-35)=0\text{，即 } 64x+9y-z-102=0\text{，}$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{64}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-35}{-1}\text{。}$$

（2）曲面的法向量函数为$\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}\frac{1}{z},\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}\frac{1}{z},-\frac{x}{z^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}-\frac{y}{z^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}\right)$，以$(x,y,z)$ $=(\ln 2,\ln 2,1)$代入，得到$(2,2,-4\ln 2)$，所以切平面方程为

$$x-\ln 2+y-\ln 2-2\ln 2(z-1)=0\text{，即 } x+y-2z\ln 2=0,$$

法线方程为

$$x-\ln 2=y-\ln 2=-\frac{1}{2\ln 2}(z-1)\text{。}$$

（3）由于$J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2u & 2v\\ 3u^2 & 3v^2\end{pmatrix}$，所以在$u=0,v=1$所对应的点处的法向量为$(0,-3,2)$，所以切平面方程为

$$-3(y-1)+2(z-1)=0\text{，即 } -3y+2z+1=0,$$

法线方程为

$$\begin{cases}x-1=0,\\ \dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{2}\end{cases}\text{，即 }\begin{cases}x=1\\ 2y+3z=5\end{cases}\text{。}$$

5. 在马鞍面$z=xy$上求一点，使得这一点的法线与平面$x+3y+z+9=0$垂直，并写出此法线的方程。

解 马鞍面的法向量$(y,x,-1)$与$(1,3,1)$平行，所以$\frac{y}{1}=\frac{x}{3}=\frac{-1}{1}$，即$y=-1,x=-3,z=xy=3$，于是该点为$(-3,-1,3)$，在该点处的法线方程为

$$x+3=\frac{1}{3}(y+1)=z-3\text{。}$$

6. 求椭球面$x^2+2y^2+3z^2=498$的平行于平面$x+3y+5z=7$的切平面。

解 由于椭球面的法向量$(2x,4y,6z)$与$(1,3,5)$平行，所以$\frac{x}{1}=\frac{2y}{3}=\frac{3z}{5}$，

解出 $y=\dfrac{3}{2}x, z=\dfrac{5}{3}x$，代入椭球面方程可得 $x=\pm 6$，即切点为 $\pm(6,9,10)$。所以有两个切平面满足条件，切平面的方程分别为

$$(x-6)+3(y-9)+5(z-10)=0 \quad 与 \quad (x+6)+3(y+9)+5(z+10)=0$$

即

$$x+3y+5z\pm 83=0。$$

7. 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与马鞍面 $bz=xy$ 的交角。

解　设 (x,y,z) 是圆柱面与马鞍面交线上一点。圆柱面在该点的的法向量为 $(2x,2y,0)$，马鞍面在该点的的法向量为 (y,x,b)，于是两法向量的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}}\cdot\frac{(y,x,-b)}{\sqrt{x^2+y^2+b^2}}=\frac{2xy}{a\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2bz}{a\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以

$$\theta=\arccos\frac{2bz}{a\sqrt{a^2+b^2}}。$$

8. 已知曲面 $x^2-y^2-3z=0$，求经过点 $A(0,0,-1)$ 且与直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ 平行的切平面的方程。

解　设切点为 (x_0,y_0,z_0)，　则曲面在该点的法向量为 $(2x_0,-2y_0,-3)$，切平面方程为

$$2x_0x-2y_0y-3(z+1)=0。$$

由于切点在切平面上，所以 $2x_0^2-2y_0^2-3(z_0+1)=0$，与曲面方程相比较可得 $z_0=1$。由于切平面与直线平行，所以

$$(2x_0,-2y_0,-3)\cdot(2,1,2)=4x_0-2y_0-6=0,$$

与曲面方程联立，并注意到 $z_0=1$，可以求出切点坐标为 $(2,1,1)$。于是，切平面方程为

$$4x-2y-3z-3=0。$$

9．设椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 上点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数。

解　曲面的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=\dfrac{(4x,6y,2z)}{\|(4x,6y,2z)\|}$，将点 $P(1,1,1)$ 的坐标代入，得到 $\boldsymbol{n}=\dfrac{(2,3,1)}{\sqrt{14}}$。于是，函数 u 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{n}=\left(\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{8}{\sqrt{14}},-\sqrt{14}\right)\cdot\frac{(2,3,1)}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}。$$

10．证明曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ \ (a>0)$ 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a。

证　设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则曲面在该点的法向量为 $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}},\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}},\dfrac{1}{2\sqrt{z_0}}\right)$，切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0，$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}，$$

所以截距之和为

$$\sqrt{x_0}\sqrt{a}+\sqrt{y_0}\sqrt{a}+\sqrt{z_0}\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a。$$

11．证明：曲线

$$\begin{cases}x=a\mathrm{e}^t\cos t,\\ y=a\mathrm{e}^t\sin t,\\ z=a\mathrm{e}^t\end{cases}$$

与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同。

解　易知曲线的切向量为 $ae^t(\cos t-\sin t,\sin t+\cos t,1)$，锥面的母线方向为 $(x,y,z)=ae^t(\cos t,\sin t,1)$，假定它们的夹角为 θ，则

$$\cos\theta = \frac{(\cos t-\sin t,\sin t+\cos t,1)\cdot(\cos t,\sin t,1)}{\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2+1^2}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}。$$

12．证明曲面 $f(ax-bz,ay-cz)=0$ 上的切平面都与某一定直线平行，其中函数 f 连续可微，且常数 a,b,c 不同时为零。

证 曲面的法向量为 $(af_1,af_2,-bf_1-cf_2)$，由于 $(af_1,af_2,-bf_1-cf_2)\cdot(b,c,a)\equiv 0$，所以曲面的法向量与非零向量 (b,c,a) 垂直，即曲面的切平面都与向量 (b,c,a) 平行，也就是与以此向量为方向的直线平行。

13．证明曲面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)\ (x\neq 0)$ 在任一点处的切平面都通过原点，其中函数 f 连续可微。

证 易知曲面上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切向量为

$$\left(f(\frac{y_0}{x_0})-\frac{y_0}{x_0}f'(\frac{y_0}{x_0}),\ f'(\frac{y_0}{x_0}),-1\right),$$

因此过点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面为

$$\left(f(\frac{y_0}{x_0})-\frac{y_0}{x_0}f'(\frac{y_0}{x_0})\right)(x-x_0)+f'(\frac{y_0}{x_0})(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

容易验证，$(0,0,0)$ 满足上述方程，即所有切平面都经过原点。

14．证明曲面 $F\left(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x}\right)=0$ 的所有切平面都过某一定点，其中函数 F 具有连续偏导数。

证 易知曲面上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切向量为

$$\left(\frac{1}{z_0}F_2-\frac{y_0}{x_0^2}F_3,\frac{1}{x_0}F_3-\frac{z_0}{y_0^2}F_1,\frac{1}{y_0}F_3-\frac{x_0}{z_0^2}F_2\right),$$

因此过点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面为

$$\left(\frac{1}{z_0}F_2-\frac{y_0}{x_0^2}F_3\right)(x-x_0)+\left(\frac{1}{x_0}F_3-\frac{z_0}{y_0^2}F_1\right)(y-y_0)+\left(\frac{1}{y_0}F_3-\frac{x_0}{z_0^2}F_2\right)(z-z_0)=0,$$

容易验证，$(0,0,0)$ 满足上述方程，即所有切平面都经过原点。

15．设 $F(x,y,z)$ 具有连续偏导数，且 ${F_x}^2+{F_y}^2+{F_z}^2\neq 0$。进一步，设 k 为

正整数，$F(x,y,z)$为k次齐次函数，即对于任意的实数t和(x,y,z)，成立

$$F(tx,ty,tz)=t^{k}F(x,y,z)。$$

证明：曲面$F(x,y,z)=0$上所有点的切平面相交于一定点。

证　利用齐次条件对t求导，有

$$xF_x(tx,ty,tz)+yF_y(tx,ty,tz)+zF_z(tx,ty,tz)=kt^{k-1}F(x,y,z),$$

再令$t=1$，得到曲面上的点(x,y,z)所满足的恒等式：

$$xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z)。$$

因为曲面上任意一点(x_0,y_0,z_0)处的法向量为

$$\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\right),$$

于是过点(x_0,y_0,z_0)的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0。$$

利用前面的恒等式，切平面方程化为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)x+F_y(x_0,y_0,z_0)y+F_z(x_0,y_0,z_0)z=kF(x_0,y_0,z_0)=0,$$

显然切平面经过原点，所以原点就是所有切平面的交点。