习 题 14.3 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式

1． 利用 Green 公式计算下列积分：

（1） $\int_{L}(x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$，其中 L 是以 $A(1,1), B(3,2), C(2,5)$ 为顶点的三角形的边界，逆时针方向；

（2） $\int_{L}xy^2dx-x^2ydy$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，逆时针方向；

（3） $\int_{L}\left(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x\right)dx+\left(x^2\sin x-2ye^x\right)dy$，其中 L 是星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$，逆时针方向；

（4） $\int_{L}e^x\left[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy\right]$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段；

（5） $\int_{L}\left(x^2-y\right)dx-\left(x+\sin^2 y\right)dy$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=2x$ 的上半部分，方向从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$；

（6） $\int_{L}\left[e^x\sin y-b(x+y)\right]dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$，其中 a,b 是正常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的一段；

（7） $\int_{L}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周（$R>1$），逆时针方向；

（8） $\int_{L}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$，其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$，逆时针方向；

（9） $\int_{L}\frac{e^x\left[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y+y\sin y)dy\right]}{x^2+y^2}$，其中 L 是包围原点的简单光滑闭曲线，逆时针方向。

解（1） $\int_{L}(x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy=\iint_{D}(-4x-2y)dxdy$

$$=-2\int_1^2dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(2x+y)dy-2\int_2^3dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{11-3x}(2x+y)dy=-\frac{140}{3}。$$

（2） $\int_{L}xy^2dx-x^2ydy=\iint_{D}(-2xy-2xy)dxdy=-4\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^a r^3dr=0$。

（3） $\int_{L}\left(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x\right)dx+\left(x^2\sin x-2ye^x\right)dy$

$$=\iint_D 0dxdy=0$$。

（4）设 $\mathbf{L}_1: y=0, x:0\to\pi$，则

$$\int_{\mathbf{L}+\mathbf{L}_1^-} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]=\iint_D e^x ydxdy=\int_0^\pi e^x dx\int_0^{\sin x} ydy=\frac{e^\pi-1}{5},$$

所以

$$\int_{\mathbf{L}} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$$

$$=\int_{\mathbf{L}_1} e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]+\frac{e^\pi-1}{5}=\frac{e^\pi-1}{5}$$。

（5）设 $\mathbf{L}_1: y=0, x:0\to 2$，则

$$\int_{\mathbf{L}+\mathbf{L}_1^-}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\iint_D(1-1)dxdy=0,$$

所以

$$\int_{\mathbf{L}}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\int_{\mathbf{L}_1}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3}$$。

（6）设 $\mathbf{L}_1: y=0, x:0\to 2a$，则

$$\int_{\mathbf{L}+\mathbf{L}_1}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy=\iint_D(b-a)dxdy=\frac{\pi}{2}a^2(b-a),$$

所以

$$\int_{\mathbf{L}}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)-\int_{\mathbf{L}_1}[e^x\sin y-b(x+y)]dx+(e^x\cos y-ax)dy$$

$$=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+b\int_0^{2a}xdx=(2+\frac{\pi}{2})a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$$。

（7）设 $P(x,y)=-\dfrac{y}{4x^2+y^2}, Q(x,y)=\dfrac{x}{4x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $\mathbf{L}_1: 4x^2+y^2=1$，逆时针方向，由 Green 公式，

$$\int_{\mathbf{L}}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_{\mathbf{L}_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$。

令 $x=\dfrac{1}{2}\cos t, y=\sin t$，得到

$$\int_{\mathbf{L}}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_{\mathbf{L}_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t)dt=\pi$$。

（8）设 $P(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+4y^2}, Q(x,y)=\dfrac{x+4y}{x^2+4y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^2-8xy-x^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径$\mathbf{L}_1: x^2+4y^2=1$，逆时针方向，由 Green 公式，

$$\int_{\mathbf{L}}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=\int_{\mathbf{L}_1}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}。$$

令$x=\cos t, y=\frac{1}{2}\sin t$，得到

$$\int_{\mathbf{L}}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=\int_{\mathbf{L}_1}\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}dt=\pi。$$

（9）设$P(x,y)=\frac{e^x(x\sin y-y\cos y)}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{e^x(x\cos y+y\sin y)}{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{[(x^2+y^2)x+y^2-x^2]\cos y+(x^2+y^2-2x)y\sin y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径L_r：$x^2+y^2=r^2$，即$x=r\cos t,\ y=r\sin t, t:0\to 2\pi$，由 Green 公式，

$$\int_{\mathbf{L}}\frac{e^x\left[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y+y\sin y)dy\right]}{x^2+y^2}$$

$$=\int_{\mathbf{L}_r}\frac{e^x\left[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y+y\sin y)dy\right]}{x^2+y^2}。$$

于是

$$I=\int_{\mathbf{L}_r}\frac{e^x\left[(x\sin y-y\cos y)dx+(x\cos y+y\sin y)dy\right]}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}e^{r\cos t}\cos(r\sin t)dt,$$

令$r\to 0$，即得到

$$I=2\pi。$$

2．利用曲线积分，求下列曲线所围成的图形的面积：

（1）星形线$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$；

（2）抛物线$(x+y)^2=ax\ (a>0)$与x轴；

（3）旋轮线的一段：$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}\quad t\in[0,2\pi]$与$x$轴。

解（1）$S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{3}{8}\pi a^2$。

（2）令$y=tx$，则$x=\frac{a}{(1+t)^2}, y=\frac{at}{(1+t)^2}$，$t:0\to+\infty$。于是

$$S=-\int_L ydx=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t)^5}dt=\frac{1}{6}a^2。$$

（3）$S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(2-t\sin t-2\cos t)dt=3\pi a^2$。

3. 先证明曲线积分与路径无关，再计算积分值：

（1）$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)$；

(2) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)dx+\phi(y)dy$，其中 $\varphi(x),\phi(y)$ 为连续函数；

(3) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，沿不通过原点的路径。

解 (1) 设 $P(x,y)=x-y,\ Q(x,y)=-(x-y)$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为 $\mathbf{L}: y=x,\ x:0\to 1$，于是

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(dx-dy)=0$$

(2) 设 $P(x,y)=\varphi(x),\ Q(x,y)=\phi(y)$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为 $\mathbf{L}$: 折线 $\overline{ABC}$，其中 $A(2,1),B(1,1),C(1,2)$，于是

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)dx+\phi(y)dy=\int_2^1\varphi(x)dx+\int_1^2\phi(y)dy=\int_1^2[\phi(t)-\varphi(t)]dt\text{。}$$

(3) 设 $P(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ Q(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为 $\mathbf{L}$: 折线 $\overline{ABC}$，其中 $A(1,0),B(6,0),C(6,8)$，于是

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_1^6 dx+\int_0^8\frac{ydy}{\sqrt{36+y^2}}=9\text{。}$$

4．证明 $(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$ 在整个 xy 平面上是某个函数的全微分，并找出这样一个原函数。

证 设 $P(x,y)=2x\cos y+y^2\cos x,\ Q(x,y)=2y\sin x-x^2\sin y$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y+2y\cos x=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$ 在整个 xy 平面上是某个函数的全微分。

设这个函数为 $u(x,y)$，则

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy+C$$

$$=\int_0^x 2xdx+\int_0^y(2y\sin x-x^2\sin y)dy=x^2\cos y+y^2\sin x+C\text{。}$$

5．证明 $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 在除去 y 的负半轴及原点的裂缝 xy 平面上是某个函数的全微分，并找出这样一个原函数。

证 设 $P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\ Q(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}，$$

所以$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$在除去y的负半轴及原点的裂缝xy平面上是某个函数的全微分。

设这个函数为$u(x,y)$，则

$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\int_0^x\frac{xdx}{x^2+1}+\int_1^y\frac{ydy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C。$$

6．设$Q(x,y)$在xy平面上具有连续偏导数，曲线积分$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$与路径无关，并且对任意t恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy，$$

求$Q(x,y)$。

解　因为曲线积分$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$与路径无关，所以$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$，两边关于$x$积分，即得到$Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$，其中$\varphi$待定。

由条件$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy$，可得

$$\int_0^1(t^2+\varphi(y))dy=\int_0^t(1+\varphi(y))dy，$$

两边对t求导，得到$2t=1+\varphi(t)$，即$\varphi(y)=2y-1$，所以

$$Q(x,y)=x^2+2y-1。$$

7．确定常数λ，使得右半平面$x>0$上的向量函数$\boldsymbol{r}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$为某二元函数$u(x,y)$的梯度，并求$u(x,y)$。

解　由题意，$\frac{\partial[2xy(x^4+y^2)^{\lambda}]}{\partial y}=\frac{\partial[-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}]}{\partial x}$，即

$$2x(x^4+y^2)^{\lambda}+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}=-2x(x^4+y^2)^{\lambda}-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}，$$

化简后，求得 $\lambda=-1$。这时

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}+C=-\int_0^y\frac{x^2dy}{x^4+y^2}+C=-\arctan\frac{y}{x^2}+C。$$

8．设一力场为$\boldsymbol{F}=(3x^2y+8xy^2)\boldsymbol{i}+(x^3+8x^2y+12ye^y)\boldsymbol{j}$，证明质点在此场内移动时，场力所作的功与路径无关。

证　设$P(x,y)=3x^2y+8xy^2, Q(x,y)=x^3+8x^2y+12ye^y$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x}，$$

所以质点在此场内移动时，场力所作的功与路径无关。

9．利用 Gauss 公式计算下列曲面积分：

（1）　$\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，$\Sigma$为立方体$0\le x,y,z\le a$的表面，方

向取外侧；

（2） $\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$，其中 Σ 为闭曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$，方向取外侧；

（3） $\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS$，其中 Σ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h\ (h>0)$ 之间的部分，方向取下侧；

（4） $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，方向取上侧；

（5） $\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4zxdxdy$，其中 Σ 是由 xy 平面上的曲线 $x=e^y\ (0\le y\le a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转面，曲面的法向量与 x 轴的正向的夹角为钝角；

（6） $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2$（$0\le z\le 1$），曲面的法向量与 z 轴的正向的夹角为锐角；

（7） $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{axdydz+(a+z)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$（$a>0$），其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，方向取上侧；

（8） $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 Σ 是

（i）椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$，方向取外侧；

（ii）抛物面 $1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}\quad(z\ge 0)$，方向取上侧。

解（1）设 Ω 是 Σ 所围的空间区域，则

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)dxdydz=6\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a zdz=3a^4\text{。}$$

（2）设 Ω 是 Σ 所围的空间区域，作变换 $\varphi:\begin{cases}u=x-y+z\\ v=y-z+x\\ w=z-x+y\end{cases}$，则

$\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=4$，且变换 φ 将 Ω 变为 $\Omega'=\left\{(u,v,w)\middle|\ |u|+|v|+|w|\le 1\right\}$，记 Ω'' 是 Ω' 在第一象限的部分，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'}\frac{3}{4}dudvdw=6\iiint\limits_{\Omega''}dudvdw=1\text{。}$$

（3）补充$\Sigma_1: z=h(x^2+y^2\le h^2)$，方向取上侧，设$\Omega$是$\Sigma+\Sigma_1$所围的空间区域，因为$\Omega$的对称性，有$\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz=\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz=0$。由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)dxdydz$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h rdr\int_r^h zdz=\frac{\pi}{2}h^4,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS$$

$$=\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}\left(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma\right)dS$$

$$=\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}h^2dxdy=-\frac{1}{2}\pi h^4。$$

（4）补充$\Sigma_1: z=0\,(x^2+y^2\le R^2)$，方向取下侧，设$\Omega$是$\Sigma+\Sigma_1$所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=2\pi R^3,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy=2\pi R^3-\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=2\pi R^3。$$

（5）由题意，可得 $\Sigma: x=e^{\sqrt{y^2+z^2}}\,(y^2+z^2\le a^2)$，方向取后侧。补充$\Sigma_1: x=e^a(y^2+z^2\le a^2)$，方向取前侧，设$\Omega$是$\Sigma+\Sigma_1$所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4zxdxdy=\iiint\limits_{\Omega}0dxdydz=0\quad,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4zxdxdy=-\iint\limits_{\Sigma_1}2(1-e^{2a})dydz=2\pi a^2(e^{2a}-1)。$$

（6）补充$\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\le 1)$，方向取下侧，设$\Omega$是$\Sigma+\Sigma_1$所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)dydz+zdxdy=-\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz=-\frac{3}{2}\pi,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy=-\frac{3}{2}\pi-\iint\limits_{\Sigma_1}1dxdy=-\frac{\pi}{2}。$$

（7）由题意，

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(a+z)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz+(a+z)^2dxdy。$$

补充$\Sigma_1: z=0\,(x^2+y^2\le a^2)$，方向取下侧，设$\Omega$是$\Sigma+\Sigma_1$所围的空间

区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} axdydz+(a+z)^2dxdy=-\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)dxdydz$$

$$=-2\pi a^4-2\pi\int_{-a}^{0}z(a^2-z^2)dz=-\frac{3}{2}\pi a^4,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} axdydz+(a+z)^2dxdy=-\frac{3}{2}\pi a^4-\iint\limits_{\Sigma_1}a^2dxdy=-\frac{1}{2}\pi a^4,$$

从而

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(a+z)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=-\frac{1}{2}\pi a^3。$$

（8）（i）记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，设原积分为 $\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^2-3x^2}{r^5},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3z^2}{r^5}。$$

设 $\Sigma'=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2\}$，方向为外侧，设 Ω 是 $\Sigma+(-\Sigma')$ 所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+(-\Sigma')}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=0。$$

由于 $\cos\alpha=\frac{x}{r},\cos\beta=\frac{y}{r},\cos\gamma=\frac{z}{r}$，

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{\Sigma'}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma'}\cos\alpha dydz+\cos\beta dzdx+\cos\gamma dxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma'}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma'}dS=4\pi。$$

注 对上面的积分，也可取 Σ' 的参数表示为 $\begin{cases}x=\varepsilon\sin\varphi\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\varphi\sin\theta\\ z=\varepsilon\cos\varphi\end{cases}$，

其中 $(\varphi,\theta)\in D'=\{0\le\varphi\le\pi,0\le\theta\le 2\pi\}$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{\Sigma'}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{D'}\sin\varphi d\varphi d\theta=4\pi。$$

（ii）设$\Sigma'=\{(x,y,z)\left|\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\le 1, z=0\}-\{(x,y,z)\right|x^2+y^2<\varepsilon^2, z=0\}$，方向为下侧，$\Sigma''=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2, z\ge 0\}$，方向为下侧。则由 Gauss 公式

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma'+\Sigma''}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=0,$$

由此得到

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{-\Sigma''}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma''}\cos\alpha dydz+\cos\beta dzdx+\cos\gamma dxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma''}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma''}dS=2\pi。$$

注　对上面的积分，也可取Σ''的参数表示为 $\begin{cases}x=\varepsilon\sin\varphi\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\varphi\sin\theta\\ z=\varepsilon\cos\varphi\end{cases}$，

其中$(\varphi,\theta)\in D''=\{0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le\theta\le 2\pi\}$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{-\Sigma''}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}=\iint\limits_{D''}\sin\varphi d\varphi d\theta=2\pi。$$

10．利用 Gauss 公式证明阿基米德原理：将物体全部浸没在液体中时，物体所受的浮力等于与物体同体积的液体的重量，而方向是垂直向上的。

证　以液面为xy平面，垂直向上的轴为z轴，在物体表面上点(x,y,z)处任取一微元，其面积为dS，设$\mathbf{n}$为物体表面上点(x,y,z)处的单位（外）法向量，ρ为液体密度。则这小块面积所受的压力大小为

$$d\mathbf{F}=\rho z d\mathbf{S},$$

它在三个方向的分力分别为

$$dF_x=\rho z\cos(\mathbf{n},x)dS,\ dF_y=\rho z\cos(\mathbf{n},y)dS,\ dF_z=\rho z\cos(\mathbf{n},z)dS,$$

于是由 Gauss 公式，

$$F_x=\rho\iint\limits_{\Sigma}z\cos(\mathbf{n},x)dS=0,\ F_y=\rho\iint\limits_{\Sigma}z\cos(\mathbf{n},y)dS=0,$$

$$F_z = \rho\iint\limits_{\Sigma} z\cos(\mathbf{n}, z)dS = \rho\iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \rho V，$$

这就是所要证明的。

11．设某种流体的速度场为$\boldsymbol{v} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$，求单位时间内流体

（1）流过圆柱：$x^2 + y^2 \le a^2,\ \ 0 \le z \le h$的侧面（方向取外侧）的流量；

（2）流过该圆柱的全表面（方向取外侧）的流量。

解（1）设$\Sigma_1: z = 0\ (x^2 + y^2 \le a^2)$，方向取下侧，$\Sigma_2: z = h\,(x^2 + y^2 \le a^2)$，方向取上侧，$D$是$\Sigma_1, \Sigma_2$在$xy$平面上的投影区域。由于

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \boldsymbol{v}d\boldsymbol{S} = -\iint\limits_{D} xydxdy = 0，\quad \iint\limits_{\Sigma_2} \boldsymbol{v}d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{D} xydxdy = 0，$$

由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} \boldsymbol{v}d\boldsymbol{S} = \iiint\limits_{\Omega} 0dxdydz = 0，$$

所以流量

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{v}d\boldsymbol{S} = 0。$$

（2）由（1）可知，流过该圆柱的全表面的流量$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{v}d\boldsymbol{S} = 0$。

12．利用 Stokes 公式计算下列曲线积分：

（1）$\int\limits_{\mathbf{L}} ydx + zdy + xdz$，其中$\mathbf{L}$是球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$与平面$x + y + z = 0$的交线（它是圆周），从$x$轴的正向看去，此圆周的方向是逆时针方向；

（2）$\int\limits_{\mathbf{L}} 3zdx + 5xdy - 2ydz$，其中$\mathbf{L}$是圆柱面$x^2 + y^2 = 1$与平面$z = y + 3$的交线（它是椭圆），从$z$轴的正向看去，是逆时针方向；

（3）$\oint\limits_{\mathbf{L}} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$，其中$\mathbf{L}$为圆柱面$x^2 + y^2 = a^2$和平面$\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1\ \ (a > 0, h > 0)$的交线（它是椭圆），从$x$轴的正向看去，是逆时针方向；

（4）$\int\limits_{\mathbf{L}} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$，其中$\mathbf{L}$是用平面$x + y + z = \dfrac{3}{2}$截立方体$0 \le x, y, z \le 1$的表面所得的截痕，从$x$轴的正向看去，是逆时针方向；

（5）$\int\limits_{\mathbf{L}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$，其中$\mathbf{L}$是沿着螺线

$x = a\cos\varphi$，$y = a\sin\varphi,\ z = \dfrac{h}{2\pi}\varphi$ 从点$A(a,0,0)$至点$B(a,0,h)$的路径；

（6）$\oint\limits_{\mathbf{L}}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$，其中$\mathbf{L}$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线，从$z$轴的正向看去，是逆时针方向。

解（1）设Σ是$\mathbf{L}$所围的平面$x+y+z=0$的部分，方向由右手法则确定（即取上侧）。由 Stokes 公式，

$$\oint\limits_{\mathbf{L}} ydx+zdy+xdz=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}=-\iint\limits_{\Sigma} dydz+dzdx+dxdy$$

$$=-\sqrt{3}\iint\limits_{\Sigma} dS=-\sqrt{3}\pi a^2。$$

（2）设Σ是$\mathbf{L}$所围的平面$z=y+3$的部分，方向由右手法则确定（即取上侧），则Σ是一个长半轴为$\sqrt{2}$、短半轴为1的椭圆。由 Stokes 公式，

$$\oint\limits_{\mathbf{L}} 3zdx+5xdy-2ydz=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 5x & -2y \end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}-2dydz+3dzdx+5dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(0-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{2}})dS=2\pi。$$

（3）设Σ是$\mathbf{L}$所围的平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$的部分，方向由右手法则确定（即取上侧）。由 Stokes 公式，

$$\oint\limits_{\mathbf{L}}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=-2\iint\limits_{\Sigma} dydz+dzdx+dxdy$$

$$=-2\iint\limits_{\Sigma}\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}dS=-2\pi a(a+h)。$$

（4）设Σ是$\mathbf{L}$所围的平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$的部分，方向由右手法则确定（即取上侧），则Σ是一个边长为$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$的正六边形。由 Stokes 公式，

$$\oint\limits_{\mathbf{L}}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$$

$$=-2\iint\limits_{\Sigma}(y+z)dydz+(z+x)dzdx+(x+y)dxdy$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=-2\sqrt{3}\iint\limits_{\Sigma}dS=-\frac{9}{2}。$$

（5）设$\mathbf{L}_1:\begin{cases} x=a \\ y=0 \\ z=t \end{cases}\quad (t:0\to h)$，由 Stokes 公式，

$$\int\limits_{\boldsymbol{L}+(-L_1)}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz=0，$$

于是

$$\int_{\mathbf{L}}(x^2-yz)dx+(y^2-xz)dy+(z^2-xy)dz=\int_0^h z^2dz=\frac{1}{3}h^3。$$

(6) 设Σ是$\mathbf{L}$所围的平面$x+y+z=2$的部分，方向由右手法则确定（即取上侧）。设Σ在xy平面的投影区域为$D_{xy}=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$，则$\iint\limits_{D_{xy}}xdxdy=\iint\limits_{D_{xy}}ydxdy=0$。由 Stokes 公式，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{L}}(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz\\&=-2\iint\limits_{\Sigma}(y+2z)dydz+(z+3x)dzdx+(x+y)dxdy\\&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(4x+2y+3z)dS=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+6)dS\\&=-2\iint\limits_{D_{xy}}(x-y+6)dxdy=-24。\end{aligned}$$

13．设$f(t)$是$\mathbf{R}$上恒为正值的连续函数，$\mathbf{L}$是逆时针方向的圆周$(x-a)^2+(y-a)^2=1$。证明

$$\int_{\mathbf{L}}xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\ge 2\pi。$$

证　设$D=\{(x,y)\mid (x-a)^2+(y-a)^2\le 1\}$。由 Green 公式，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{L}}xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint\limits_{D}(f(y)+\frac{1}{f(x)})dxdy\\&=\iint\limits_{D}(f(x)+\frac{1}{f(x)})dxdy\ge\iint\limits_{D}2dxdy=2\pi，\end{aligned}$$

其中第二个等式利用了区域的对称性。

14．设$\mathbf{D}$为两条直线$y=x$，$y=4x$和两条双曲线$xy=1$，$xy=4$所围成的区域，$F(u)$是具有连续导数的一元函数，记$f(u)=F'(u)$。证明

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\ln 2\int_1^4 f(u)du，$$

其中∂D的方向为逆时针方向。

证：由 Green 公式，得 $\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\iint\limits_{D}f(xy)dxdy$。作变换 $u=xy,v=\frac{y}{x}$，则此变换将区域$\mathbf{D}$变为$D_{uv}=\{(u,v)\mid 1\le u\le 4,1\le v\le 4\}$，变换的 Jacobi 行列式为$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2v}$，于是

$$\iint\limits_{D}f(xy)dxdy=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(u)}{2v}dudv=\int_1^4 f(u)du\int_1^4\frac{1}{2v}dv=\ln 2\int_1^4 f(u)du，$$

所以

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}dy=\ln 2\int_1^4 f(u)du$$。

15．证明：若 Σ 为封闭曲面，$\boldsymbol{l}$ 为一固定向量，则

$$\iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})dS=0，$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Σ 的单位外法向量。

证　记 $\boldsymbol{l}=(a,b,c)$，而　$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}=\frac{1}{\|\boldsymbol{l}\|}(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)，$$

于是由 Gauss 公式，得到

$$\iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})dS=\frac{1}{\|\boldsymbol{l}\|}\iint_\Sigma adydz+bdzdx+cdxdy=0。$$

16．设区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 所围成。证明：

$$\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{r}=\frac{1}{2}\iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})dS，$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Σ 的单位外法向量，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，　$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

证　由 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}=\dfrac{1}{r}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$，可知

$$\iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})dS=\iint_\Sigma \frac{1}{r}(xdydz+ydzdx+zdxdy)。$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{y^2+z^2}{r^3},\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)=\frac{x^2+z^2}{r^3},\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{x^2+y^2}{r^3},$$

由 Gauss 公式，得到

$$\frac{1}{2}\iint_\Sigma \cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})dS=\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{r}。$$

17．设函数 $P(x,y,z),\ Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数。且对于任意光滑曲面 Σ，成立

$$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0。$$

证明：在 $\mathbf{R}^3$ 上，$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\equiv 0$。

证　用反证法。若存在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，使得 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\neq 0$，则不妨设 $\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0}>0$。由于函数 $P(x,y,z),\ Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数，即 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 连续，所以存在 $r,c>0$，使得当

$$(x,y,z)\in\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le r^2\right\}$$

时成立$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}>c>0$。

但另一方面，由 Gauss 公式，

$$\iint_{\partial\Omega} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$\geq \iiint_{\Omega} cdxdydz=\frac{4}{3}\pi r^3 c>0,$$

这就与题设矛盾。

18．设**L**是平面$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$上的简单闭曲线，它所包围的区域**D**的面积为$S$，其中$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是平面取定方向上的单位向量。证明

$$S=\frac{1}{2}\int_{L}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中**L**的定向与平面的定向符合右手定则。

证　由 Stokes 公式，

$$\int_{L}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=\int_{L}(z\cos\beta-y\cos\gamma)dx+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)dy+(y\cos\alpha-x\cos\beta)dz$$

$$=\iint_{D}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z\cos\beta-y\cos\gamma & x\cos\gamma-z\cos\alpha & y\cos\alpha-x\cos\beta \end{vmatrix}dS$$

$$=2\iint_{D}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)dS=2\iint_{D}dS=2S,$$

所以

$$S=\frac{1}{2}\int_{L}\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}。$$