习 题　14.4　微分形式的外微分

1. 计算下列微分形式的外微分：

（1） 1-形式$\omega = 2xydx + x^2dy$；

（2） 1-形式$\omega = \cos ydx - \sin xdy$；

（3） 2-形式$\omega = 6zdx \wedge dy - xydx \wedge dz$。

解（1） $d\omega = 2ydx \wedge dx + 2xdy \wedge dx + 2xdx \wedge dy = 0$。

（2） $d\omega = -\sin ydy \wedge dx - \cos xdx \wedge dy = (\sin y - \cos x)dx \wedge dy$。

（3） $d\omega = 6dz \wedge dx \wedge dy - xdy \wedge dx \wedge dz = (x+6)dx \wedge dy \wedge dz$。

2．设$\omega = a_1(x_1)dx_1 + a_2(x_2)dx_2 + \cdots + a_n(x_n)dx_n$是$\mathbf{R}^n$上的 1-形式，求$d\omega$。

解 $d\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i'(x_i)dx_i \wedge dx_i = 0$

3．设$\omega = a_1(x_2,x_3)dx_2 \wedge dx_3 + a_2(x_1,x_3)dx_3 \wedge dx_1 + a_3(x_1,x_2)dx_1 \wedge dx_2$是$\mathbf{R}^3$上的 2-形式，求$d\omega$。

解　设 $\omega_1 = a_1(x_2,x_3)dx_2 \wedge dx_3$，由于

$$dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0, dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0，$$

则有

$$d\omega_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0。$$

类似地，设 $\omega_2 = a_2(x_1,x_3)dx_3 \wedge dx_1$， $\omega_3 = a_3(x_1,x_2)dx_1 \wedge dx_2$，则

$$d\omega_2 = d\omega_3 = 0，$$

从而

$$d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 + d\omega_3 = 0。$$

4. 在$\mathbf{R}^3$上在一个开区域$\Omega = (a,b)\times(c,d)\times(e,f)$上定义了具有连续导数的函数$a_1(z)$， $a_2(x)$， $a_3(y)$，试求形如

$$\omega = b_1(y)dx + b_2(z)dy + b_3(x)dz$$

的 1-形式ω，使得

$$d\omega = a_1(z)dy \wedge dz + a_2(x)dz \wedge dx + a_3(y)dx \wedge dy \quad。$$

解 由题意，可得

$$b_1'(y) = -a_3(y), b_2'(z) = -a_1(z), b_3'(x) = -a_2(x)，$$

所以

$$\omega = -(\int a_3(y)dy)dx - (\int a_1(z)dz)dy - (\int a_2(x)dx)dz。$$

5. 设$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}dx_i \wedge dx_j$ （$a_{ij} = -a_{ji}$， $i,j = 1,2,\cdots,n$）是$\mathbf{R}^n$上的 2-形式，证明

$$d\omega = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \text{。}$$

证 因为

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i \wedge dx_j = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} dx_j \wedge dx_k = \sum_{k,i=1}^{n} a_{ki} dx_k \wedge dx_i \text{，}$$

所以

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_k \wedge dx_i \text{，} \end{aligned}$$

由于

$$dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j = dx_j \wedge dx_k \wedge dx_i = dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \text{，}$$

从而

$$d\omega = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \text{。}$$