第三章　函数极限与连续函数

习　题　3.1　函数极限

1. 按函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 2} x^3=8$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$；

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$；　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$；

(7) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{2x}{x^2-4}=+\infty$；　　(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty$。

证　(1) 先取$|x-2|<1$，则$1<x<3$，$|x^3-8|=|(x^2+2x+4)(x-2)|<19|x-2|$，于是对任意的$\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{19}\right\}>0$，当$0<|x-2|<\delta$时，成立$|x^3-8|<19|x-2|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to 2} x^3=8。$$

(2) 首先函数$\sqrt{x}$的定义域为$x\ge 0$，且$|\sqrt{x}-2|=\dfrac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}\le\dfrac{1}{2}|x-4|$，于是对任意的$\varepsilon>0$，取$\delta=\min\{4,2\varepsilon\}>0$，当$0<|x-4|<\delta$时，成立$|\sqrt{x}-2|\le\dfrac{1}{2}|x-4|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2。$$

(3) 先取$|x-3|<1$，则$2<x<4$，$\left|\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{x-3}{2(x+1)}\right|<\dfrac{1}{6}|x-3|$，于是对任意的$\varepsilon>0$，取$\delta=\min\{1,6\varepsilon\}>0$，当$0<|x-3|<\delta$时，成立$\left|\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{6}|x-3|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}。$$

(4) 先取$|x|>1$，则$|2x-1|\ge|x|$，$\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{3}{2|2x-1|}\le\dfrac{3}{2|x|}$，于是对任意的$\varepsilon>0$，取$X=\max\left\{1,\dfrac{3}{2\varepsilon}\right\}>0$，当$|x|>X$时，成立$\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right|\le\dfrac{3}{2|x|}<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-1}=\frac{1}{2}。$$

（5）对任意的$G>0$，取$\delta=e^{-G}>0$，当$0<x<\delta$时，成立$\ln x<-G$，所以

$$\lim_{x\to 0+}\ln x=-\infty。$$

（6）对任意的$0<\varepsilon<1$，取$X=\ln\frac{1}{\varepsilon}>0$，当$x>X$时，成立$0<e^{-x}<e^{\ln\varepsilon}=\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0。$$

（7）先取$0<x-2<1$，则$2<x<3$，$\frac{2x}{x+2}>1$，于是对任意的$G>0$，取$\delta=\min\left\{1,\frac{1}{G}\right\}$，当$0<x-2<\delta$时，成立$\frac{2x}{x^2-4}=\frac{2x}{(x+2)(x-2)}>\frac{1}{x-2}>G$，所以

$$\lim_{x\to 2+}\frac{2x}{x^2-4}=+\infty。$$

（8）先取$x<-1$，则$\frac{x}{x+1}>1$，于是对任意的$G>0$，取$X=\max\{1,G\}$，当$x<-X$时，成立$\frac{x^2}{x+1}<x<-G$，所以

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=-\infty。$$

2. 求下列函数极限：

⑴ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　⑵ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

⑶ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^5-5x^3+2x}{x^5-x^3+3x}$；　⑷ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)(1+3x)-1}{x}$；

⑸ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$；　⑹ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$；

⑺ $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　⑻ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$；

⑼ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$；　⑽ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

解

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$。

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{1}{2}$。

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^5-5x^3+2x}{x^5-x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-5x^2+3x^4}{3-x^2+x^4}=\frac{2}{3}$。

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+5x+6x^2)-1}{x}=5$。

（5） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+x^n}{x}=n$。

（6） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+nmx+C_n^2m^2x^2+\cdots+m^nx^n)-(1+mnx+C_m^2n^2x^2+\cdots+n^mx^m)}{x^2}$$

$=\dfrac{1}{2}nm(n-m)$。

（7） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\cos a$。

（8） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}=2$。

（9） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x\sin 2x}{x^2}=4$。

（10） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^3\cos x}=\dfrac{1}{2}$。

3. 利用夹逼法求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$；　　　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$。

解（1） $\forall x>0$，当 $\dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}$，有 $\dfrac{n}{n+1}<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，可知 $\lim\limits_{x\to 0+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$。$\forall x<0$，当 $-\dfrac{1}{n}<x\le-\dfrac{1}{n+1}$，有 $1\le x\left[\dfrac{1}{x}\right]<\dfrac{n+1}{n}$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，可知 $\lim\limits_{x\to 0-}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$。由此得到

$$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1。$$

（2）当 $n\le x<n+1$，有 $n^{\frac{1}{n+1}}<x^{\frac{1}{x}}<(n+1)^{\frac{1}{n}}$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n+1}}=1$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=1$，得到

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1。$$

4. 利用夹逼法证明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$　(a＞1，k 为任意正整数)；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^k x}{x}=0$　(k 为任意正整数)。

解（1）首先有$0<\frac{x^k}{a^x}<\frac{([x]+1)^k}{a^{[x]}}$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{a^n}=0$即得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0。$$

（2）令$\ln x=t$，则$\frac{\ln^k x}{x}=\frac{t^k}{e^t}$，且当$x\to+\infty$时，有$t\to+\infty$。再利用（1）的结论，即得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x}=0。$$

5. 讨论单侧极限：

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 0<x\le 1,\\ x^2, & 1<x<2,\\ 2x & 2<x<3,\end{cases}$ 在 $x=0,1,2$ 三点；

(2) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$， 在 $x=0$ 点；

(3) Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$ 在任意点；

(4) $f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$, 在 $x=\frac{1}{n}$ （$n=1,2,3,\cdots$）。

解（1）$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=4$，$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=4$。

（2）$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$。

（3）$D(x)$在任意点无单侧极限。

（4）$\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}+}f(x)=1$。

6. 说明下列函数极限的情况：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x\sin x$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)$。

解（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$。

（2）$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x\sin x$极限不存在，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x\sin x$极限不存在。

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0 & \alpha<1\\ 1 & \alpha=1\\ +\infty & \alpha>1\end{cases}$。

（4） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=+\infty$， $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$极限不存在。

（5） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}=1$。

（6）取$x_n^{'}=\frac{1}{n}$， $x_n^{''}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n^{'}}-\left[\frac{1}{x_n^{'}}\right]\right)=0$， $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n^{''}}-\left[\frac{1}{x_n^{''}}\right]\right)=\frac{1}{2}$，

所以$\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)$极限不存在。

7．设函数

$$f(x)=\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)。$$

问当$x\to0$时， $f(x)$的极限是否存在？

解 由于$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^4}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$，

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1，所以$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1。$$

8. 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$（$a\geq0$），证明： $\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$ 。

证 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$（$a\geq0$），则$\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta'>0$， $\forall x(0<|x-a|<\delta')$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$。取$\delta=\min\left\{1,\frac{\delta'}{1+2\sqrt{a}}\right\}>0$，则当$0<|x-\sqrt{a}|<\delta$时，首先有$|x+\sqrt{a}|<1+2\sqrt{a}$，于是$0<|x^2-a|=|(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})|<\delta'$，从而$|f(x^2)-A|<\varepsilon$，这就说明了$\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$ 。

9. (1) 设$\lim\limits_{x\to0}f(x^3)=A$，证明： $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$ 。

(2) 设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = A$，问是否成立 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$？

证 （1）设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3) = A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta'>0$，$\forall x(0<|x|<\delta')$（即 $0<|x^3|<\delta'^3$），有 $|f(x^3)-A|<\varepsilon$。取 $\delta=\delta'^3>0$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，有 $0<\left|x^{\frac{1}{3}}\right|<\delta'$，从而 $|f(x)-A|<\varepsilon$，这就说明了 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$ 。

（2）当 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)=A$ 时，不一定成立 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$。例如：$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)=1$，但极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

10. 写出下述命题的“否定命题”的分析表述：

(1) $\{x_n\}$ 是无穷小量；

(2) $\{x_n\}$ 是正无穷大量；

(3) $f(x)$ 在 x_0 的右极限是 A；

(4) $f(x)$ 在 x_0 的左极限是正无穷大量；

(5) 当 $x\to-\infty$，$f(x)$ 的极限是 A；

(6) 当 $x\to+\infty$，$f(x)$ 是负无穷大量。

解（1）$\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n>N:|x_n|\ge\varepsilon_0$。

（2）$\exists G_0>0,\forall N,\exists n>N:x_n\le G_0$。

（3）$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0,x_0+\delta):|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$。

（4）$\exists G_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0-\delta,x_0):f(x)\le G_0$。

（5）$\exists\varepsilon_0>0,\forall X>0,\exists x\in(-\infty,-X):|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$。

（6）$\exists G_0>0,\forall X>0,\exists x\in(X,+\infty):f(x)\ge -G_0$。

11. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$ 的充分必要条件是：对于任意从右方收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}(x_n>x_0)$，成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty。$$

证 必要性：由 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$，可知 $\forall G>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x(0<x-x_0<\delta)$：$f(x)>G$。因为数列 $\{x_n\}(x_n>x_0)$ 收敛于 x_0，对于上述 $\delta>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$0<x_n-x_0<\delta$。于是当 $n>N$ 时，成立 $f(x_n)>G$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$。

充分性：用反证法。设 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$ 不成立，则 $\exists G_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x(0<x-x_0<\delta)$：$f(x)\le G_0$。取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$：

对于 $\delta_1=1$，$\exists x_1(0<x_1-x_0<1)$：$f(x_1)\le G_0$；

对于$\delta_2=\frac{1}{2}$，$\exists x_2 (0<x_2-x_0<\frac{1}{2})$：$f(x_2)\le G_0$；

$\cdots,$

对于$\delta_k=\frac{1}{k}$，$\exists x_k (0<x_k-x_0<\frac{1}{k})$：$f(x_k)\le G_0$；

$\cdots,$

于是得到数列$\{x_n\}$ $(x_n>x_0)$收敛于x_0，但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不可能是无穷大量，由此产生矛盾，所以$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=+\infty$成立。

12. 证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$的充分必要条件是：对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=-\infty。$$

证　必要性：由$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$，可知$\forall G>0$，$\exists X>0$，$\forall x>X$：$f(x)<-G$。因为数列$\{x_n\}$是正无穷大量，对于上述$X>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$x_n>X$。于是当$n>N$时，成立$f(x_n)<-G$，即$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=-\infty$。

充分性：用反证法。设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$不成立，则$\exists G_0>0$，$\forall X>0$，$\exists x>X$：$f(x)\ge -G_0$。取$X_n=n$，$n=1,2,3,\cdots$：

对于$X_1=1$，$\exists x_1>1$：$f(x_1)\ge -G_0$；

对于$X_2=2$，$\exists x_2>2$：$f(x_2)\ge -G_0$；

$\cdots,$

对于$X_k=k$，$\exists x_k>k$：$f(x_k)\ge -G_0$；

$\cdots,$

于是得到数列$\{x_n\}$为正无穷大量，但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不可能是负无穷大量，由此产生矛盾，所以$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$成立。

13. 证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在而且有限的充分必要条件是：对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛。

证　必要性：设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$\forall x>X$：$|f(x)-A|<\varepsilon$。因为数列$\{x_n\}$是正无穷大量，对于上述$X>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$x_n>X$。于是当$n>N$时，成立$|f(x_n)-A|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

充分性：因为对于任意正无穷大量$\{x_n\}$，相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛，我们可以断言$\{f(x_n)\}$收敛于同一个极限。如果存在正无穷大量$\{x'_n\}$与$\{x''_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)=B$，且$A\ne B$，则取$x_{2n-1}=x'_n$，$x_{2n}=x''_n$，$\{x_n\}$仍然是正无穷大量，但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不收敛。

设$\{f(x_n)\}$都收敛于同一个极限A，现用反证法证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 不成立，则 $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall X>0$，$\exists x>X$ ：$|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$。取 $X_n=n$， $n=1,2,3,\cdots$ ：

对于 $X_1=1$， $\exists x_1>1$ ：$|f(x_1)-A|\ge\varepsilon_0$ ；

对于 $X_2=2$， $\exists x_2>2$ ：$|f(x_2)-A|\ge\varepsilon_0$ ；

$\cdots$,

对于 $X_k=k$， $\exists x_k>k$ ：$|f(x_k)-A|\ge\varepsilon_0$ ；

$\cdots$,

于是得到数列$\{x_n\}$为正无穷大量，但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不收敛于 A，由此产生矛盾，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

14．分别写出下述函数极限存在而且有限的 Cauchy 收敛原理，并加以证明：

（1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ；（2） $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ ；（3） $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$。

解 （1）极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对一切 $x',x''\in\left\{x\,\middle|\,0<|x-x_0|<\delta\right\}$，成立 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。

先证必要性。设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$，

$\forall x',x''\in\left\{x\,\middle|\,0<|x-x_0|<\delta\right\}$ ：$|f(x')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$， $|f(x'')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。于是

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon。$$

再证充分性。任意选取数列$\{x_n\}$， $x_n\ne x_0$， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则对于条件中的 $\delta>0$ ， $\exists N$ ， $\forall n>N$ ： $0<\left|x_n-x_0\right|<\delta$ 。于是当 $m>n>N$ 时，成立 $\left|f(x_m)-f(x_n)\right|<\varepsilon$。这说明函数值数列$\{f(x_n)\}$是基本数列，因而收敛。再根据相应的 Heine 定理，可知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在而且有限。

（2） $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对一切 $x',x''\in\left\{x\,\middle|\,0<x-x_0<\delta\right\}$，成立 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。

先证必要性。设 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$， $\exists\delta>0$，

$\forall x',x''\in\left\{x\,\middle|\,0<x-x_0<\delta\right\}$ ：$|f(x')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$， $|f(x'')-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。于是

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon。$$

再证充分性。任意选取数列$\{x_n\}$， $x_n>x_0$， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则对于条件中的 $\delta>0$ ， $\exists N$ ， $\forall n>N$ ： $0<x_n-x_0<\delta$ 。于是当 $m>n>N$ 时，成立 $\left|f(x_m)-f(x_n)\right|<\varepsilon$。这说明函数值数列$\{f(x_n)\}$是基本数列，因而收敛。再根据相应的 Heine 定理，可知 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 存在而且有限。

（3）$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，对一切 $x',x''<-X$，成立 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。

先证必要性。设 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$\forall x',x''<-X$：$|f(x')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$。于是

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon。$$

再证充分性。任意选取数列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$，则对于条件中的 $X>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$x_n<-X$。于是当 $m>n>N$ 时，成立 $\left|f(x_m)-f(x_n)\right|<\varepsilon$。这说明函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列，因而收敛。再根据相应的 Heine 定理，可知 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在而且有限。

15．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足函数方程 $f(2x)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，证明

$$f(x)\equiv A,\quad x\in(0,+\infty)。$$

证 $\forall x_0\in(0,+\infty)$，利用 $f(x)=f(2x)$ 得到 $f(x_0)=f(2^n x_0)$，由于

$$\lim_{n\to\infty} f(2^n x_0)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A，得到 f(x)\equiv A,\quad x\in(0,+\infty)。$$

习　题 3.2　连续函数

1. 按定义证明下列函数在其定义域连续：

(1) $y=\sqrt{x}$；　　　　(2) $y=\sin\frac{1}{x}$；

(3) $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

证 （1）函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域是 $D=[0,+\infty)$。设 $x_0\in D$，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^2>0$，当 $|x-x_0|<\delta$（$x\in D$）时，成立

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|\le\sqrt{|x-x_0|}<\varepsilon,$$

所以函数 $y=\sqrt{x}$ 在其定义域连续。

（2）函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 的定义域是 $D=(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$。设 $x_0\in D$，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2},\frac{|x_0|^2}{2}\varepsilon\right\}>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$\left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x_0}\right|\le\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|xx_0|}<\frac{2|x-x_0|}{|x_0|^2}<\varepsilon,$$

所以函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在其定义域连续。

（3）函数 $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$。由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，可知函数在 $x_0=0$ 连续。设 $x_0\neq 0$，对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\frac{|x_0|}{2},\frac{|x_0|^2}{2(|x_0|+1)}\varepsilon\right\}>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$\left|\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin x_0}{x_0}\right|=\frac{|x_0\sin x-x\sin x_0|}{|xx_0|}\le\frac{|x_0||\sin x-\sin x_0|+|\sin x_0||x-x_0|}{|xx_0|}$$

$$<\frac{2(|x_0|+1)}{|x_0|^2}|x-x_0|<\varepsilon,$$

所以 $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在其定义域连续。

2. 确定下列函数的连续范围：

(1) $y=\tan x+\csc x$；　　　　(2) $y=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$；

(3) $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-3)}{x+1}}$；　　　　(4) $y=[x]\ln(1+x)$；

(5) $y=\left[\frac{1}{x}\right]$；　　　　　　　　　(6) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$。

解（1）$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(\frac{k\pi}{2},\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$。

（2）$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$。

（3）$(-1,1]\cup[3,+\infty)$。

（4）$\{x\mid x>-1,\ x\notin \mathrm{N}^+\}$。

（5）$\{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}\setminus\left\{\frac{1}{k}\mid k\in Z,k\neq 0\right\}$。

（6）$\bigcup\limits_{k\in Z}(k\pi,(k+1)\pi)$。

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，证明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续。反之，若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续，能否断言 $f(x)$ 在点 x_0 连续?

解 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $\forall 0<\varepsilon<1$，$\exists\delta>0$，$\forall x(|x-x_0|<\delta)$，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，同时还有 $|f(x)+f(x_0)|<1+2|f(x_0)|$，于是成立

$$\left|f^2(x)-f^2(x_0)\right|=|(f(x)+f(x_0))(f(x)-f(x_0))|<(1+2|f(x_0)|)\varepsilon$$

与

$$||f(x)|-|f(x_0)||\le|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

这说明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续。

反之，若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续，则不能断言 $f(x)$ 在点 x_0 连续。例如：$f(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 $x_0=0$ 是连续的。

4. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 不连续，能否断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续?

又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 都不连续，则上面的断言是否成立?

解　若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 不连续，不能断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续：例如 $f(x)\equiv 0$ 在点 $x_0=0$ 连续，$g(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 2 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f(x)g(x)\equiv 0$ 在点 $x_0=0$ 连续。

又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 都不连续，也不能断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续：例如 $f(x)=\begin{cases}2 & x\ge 0\\ 1 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，$g(x)=\begin{cases}1 & x\ge 0\\ 2 & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f(x)g(x)\equiv 2$ 在点 $x_0=0$ 连续。

5. 若 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\max\{f,g\}$ 与 $\min\{f,g\}$ 在 $[a,b]$ 上连续，其中

max{f，g} = max { $f(x)$ ， $g(x)$ }，$x\in[a,b]$ ；

min {f，g} = min { $f(x)$ ， $g(x)$ }，$x\in[a,b]$。

证　由 f,g 在$[a,b]$上的连续性，可知$|f(x)-g(x)|$在$[a,b]$上连续，利用等式

$$\max\{f,g\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\},$$

$$\min\{f,g\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\},$$

即得到 max { f,g }与 min{ f,g }在$[a,b]$上的连续性。

6. 若对任意$\delta>0$，f 在 ［$a+\delta,b-\delta$］ 上连续，能否得出

(1)　f 在(a,b)上连续?

(2)　f 在$[a,b]$上连续?

解　（1）能。（2）不能。

7. 设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\beta$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\alpha^{\beta}$；并求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$　$(\sin a\neq 0)$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^{n}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$。

证　由于$\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\ln f(x)]=\beta\ln\alpha$，利用指数函数的连续性，得到

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\beta\ln\alpha}=\alpha^{\beta}。$$

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}=1$。

（2） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=e^{2}$。

（3） $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\dfrac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a}}=e^{\cot a}$。

（4） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{x+1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{x+1}}\right]^{\frac{(x+1)n}{n-1}}=e^{x+1}$。

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{1}{n}}{2\tan\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{2n\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}}=e^2$。

8. 指出下列函数的不连续点，并确定其不连续的类型：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$ (2) $y=[x]\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\dfrac{x}{\sin x}$； (4) $y=[2x]-2[x]$；

(5) $y=\dfrac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}$； (6) $y=x\ln^n|x|$；

(7) $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$； (8) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt{1+2x}-1}$；

(9) $y=\begin{cases}\sin\pi x, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数};\end{cases}$ (10) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (p,q\text{互质，}p>0),\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

解（1） $x=1,-2$，第二类不连续点。

（2） $x=k\ (k\in Z,k\neq 0)$，第一类不连续点；$x=0$，第二类不连续点。

（3） $x=k\pi\ (k\in Z,k\neq 0)$，第二类不连续点；$x=0$，第三类不连续点。

（4） $x=\frac{1}{2}k\ (k\in Z)$，第一类不连续点。

（5） $x=0$，第三类不连续点。

（6） $x=0$，第三类不连续点。

（7） $x=0$，第一类不连续点；$x=1$，第三类不连续点；$x=-1$，第二类不连续点。

（8） $x=0$，第三类不连续点。

（9）非整数点，第二类不连续点。

（10）非整数有理点，第三类不连续点。

9．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且满足 $f(x^2)=f(x)$， $x\in(0,+\infty)$，证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为常数函数。

证 $\forall x\in(0,+\infty)$，利用 $f(x^2)=f(x)$ 得到 $f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}})$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}=1$ 及 $f(x)$ 的连续性，得到 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$。