习　题　4.3　导数四则运算和反函数求导法则

1．用定义证明$(\cos x)' = -\sin x$。

证　由于

$$\cos(x+\Delta x)-\cos x = -2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2},$$

根据$\sin x$的连续性和$\sin(\frac{\Delta x}{2}) \sim \frac{\Delta x}{2}(\Delta x \to 0)$，可知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x。$$

2．证明：

(1) $(\csc x)' = -\cot x\csc x$；

(2) $(\cot x)' = -\csc^2 x$；

(3) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(4) $(\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$；

(5) $(\operatorname{ch}^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；

(6) $(\operatorname{th}^{-1} x)' = (\operatorname{cth}^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

解 (1) $(\csc x)' = \left[\frac{1}{\sin x}\right]' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x\csc x$。

(2) $(\cot x)' = \left[\frac{1}{\tan x}\right]' = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$。

(3) $(\arccos x)' = (\frac{\pi}{2}-\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。

(4) $(\operatorname{arc}\cot x)' = (\frac{\pi}{2}-\arctan x)' = -\frac{1}{1+x^2}$。

(5) $(\operatorname{ch}^{-1} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch} y)'} = \frac{1}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$。

(6) $(\operatorname{th}^{-1} x)' = \frac{1}{(\operatorname{th} y)'} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$，

$$(\mathrm{cth}^{-1}x)' = \frac{1}{(\mathrm{cth}\,y)'} = -\frac{1}{\mathrm{csch}^2 y} = -\frac{1}{\mathrm{cth}^2 y - 1} = \frac{1}{1-x^2}。$$

3. 求下列函数的导函数：

(1) $f(x) = 3\sin x + \ln x - \sqrt{x}$；(2) $f(x) = x\cos x + x^2 + 3$；

(3) $f(x) = (x^2 + 7x - 5)\sin x$；(4) $f(x) = x^2(3\tan x + 2\sec x)$；

(5) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x - 4\cos x + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$；(6) $f(x) = \dfrac{2\sin x + x - 2^x}{\sqrt[3]{x^2}}$；

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x + \cos x}$；(8) $f(x) = \dfrac{x\sin x - 2\ln x}{\sqrt{x} + 1}$；

(9) $f(x) = \dfrac{x^3 + \cot x}{\ln x}$；(10) $f(x) = \dfrac{x\sin x + \cos x}{x\sin x - \cos x}$；

(11) $f(x) = (\mathrm{e}^x + \log_3 x)\arcsin x$；(12) $f(x) = (\csc x - 3\ln x)x^2\,\mathrm{sh}\,x$；

(13) $f(x) = \dfrac{x + \sec x}{x - \csc x}$；(14) $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{\arctan x}$；

解 (1) $f'(x) = (3\sin x)' + (\ln x)' - (\sqrt{x})' = 3\cos x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$。

(2) $f'(x) = x'\cos x + x(\cos x)' + (x^2)' + (3)' = \cos x - x\sin x + 2x$。

(3) $f'(x) = (x^2 + 7x - 5)'\sin x + (x^2 + 7x - 5)(\sin x)'$

$= (2x + 7)\sin x + (x^2 + 7x - 5)\cos x$。

(4) $f'(x) = (x^2)'(3\tan x + 2\sec x) + x^2(3\tan x + 2\sec x)'$

$= 2x(3\tan x + 2\sec x) + x^2(3\sec^2 x + 2\tan x\sec x)$。

(5) $f'(x) = (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' - (4\cos x)' + (\dfrac{3}{\sqrt{x}})'$

$= e^x(\sin x + \cos x) + 4\sin x - \dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$。

(6) $f'(x) = (x + 2\sin x - 2^x)'x^{-\frac{2}{3}} + (x + 2\sin x - 2^x)(x^{-\frac{2}{3}})'$

$$=(1+2\cos x-2^x\ln 2)x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}(x+2\sin x-2^x)x^{-\frac{5}{3}}$$。

(7) $f'(x)=-\dfrac{(x+\cos x)'}{(x+\cos x)^2}=\dfrac{\sin x-1}{(x+\cos x)^2}$。

(8) $f'(x)=\dfrac{(x\sin x-2\ln x)'(\sqrt{x}+1)-(x\sin x-2\ln x)(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$$=\frac{2(x\sin x+x^2\cos x-2)(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}(x\sin x-2\ln x)}{2x(\sqrt{x}+1)^2}$$。

(9) $f'(x)=\dfrac{(x^3+\cot x)'\ln x-(x^3+\cot x)(\ln x)'}{\ln^2 x}$

$$=\frac{(3x^2-\csc^2 x)x\ln x-x^3-\cot x}{x\ln^2 x}$$。

(10) $f'(x)=(1+\dfrac{2\cos x}{x\sin x-\cos x})'$

$$=\frac{(2\cos x)'(x\sin x-\cos x)-2\cos x(x\sin x-\cos x)'}{(x\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{-2(x+\sin x\cos x)}{(x\sin x-\cos x)^2}$$。

(11) $f'(x)=(e^x+\log_3 x)'\arcsin x+(e^x+\log_3 x)(\arcsin x)'$

$$=(e^x+\frac{1}{x\ln 3})\arcsin x+(e^x+\frac{\ln x}{\ln 3})\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$。

(12) $f'(x)=(\csc x-3\ln x)'x^2\text{sh}x+(\csc x-3\ln x)(x^2)'\text{sh}x$

$$+(\csc x-3\ln x)x^2(\text{sh}x)'$$

$$=-(\cot x\csc x+\frac{3}{x})x^2\text{sh}x+(\csc x-3\ln x)(2x)\text{sh}x+(\csc x-3\ln x)x^2\text{ch}x$$

$$=-(x^2\cot x\csc x+3x)\text{sh}x+x(\csc x-3\ln x)(2\text{sh}x+x\text{ch}x)$$。

(13) $f'(x)=\dfrac{(x+\sec x)'(x-\csc x)-(x+\sec x)(x-\csc x)'}{(x-\csc x)^2}$

$$=\frac{(1+\tan x\sec x)(x-\csc x)-(x+\sec x)(1+\cot x\csc x)}{(x-\csc x)^2}$$。

（14） $f'(x)=\dfrac{(x+\sin x)'\arctan x-(x+\sin x)(\arctan x)'}{\arctan^2 x}$

$=\dfrac{(1+x^2)(1+\cos x)\arctan x-(x+\sin x)}{(1+x^2)\arctan^2 x}$。

4. 求曲线 $y=\ln x$ 在 $(\mathrm{e},1)$ 处的切线方程和法线方程。

解　因为 $y'(e)=\left.\dfrac{1}{x}\right|_{x=e}=\dfrac{1}{e}$，切线方程为

$$y=\frac{1}{e}(x-e)+1=\frac{x}{e},$$

法线方程为

$$y=-e(x-e)+1=-ex+(e^2+1)\text{。}$$

5. 当 a 取何值时，直线 $y=x$ 能与曲线 $y=\log_a x$ 相切，切点在哪里？

解 设切点为 (x_0,x_0)，由于 $y=x$ 是 $y=f(x)=\log_a x$ 的切线，其斜率为 1，所以 $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0\ln a}=1$，故 $x_0=\dfrac{1}{\ln a}$。又由 $f(x_0)=\log_a x_0=\dfrac{\ln x_0}{\ln a}=x_0$，得到 $\ln x_0=1$，即 $x_0=e$，从而 $a=e^{e^{-1}}$，切点为 (e,e)。

6．求曲线 $y=x^n$（$n\in\mathbf{N}^+$）上过点 $(1,1)$ 的切线与 x 轴的交点的横坐标 x_n，并求出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n)$。

解　因为 $y'(1)=\left.nx^{n-1}\right|_{x=1}=n$，所以过点 $(1,1)$ 的切线为 $y=n(x-1)+1$，它与 x 轴交点的横坐标为 $x_n=\dfrac{n-1}{n}$，因此

$$\lim_{n\to\infty}y(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\text{。}$$

7. 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，设集合

$\mathrm{S}_1=\{(x,y)\mid$过(x,y)可以作该抛物线的两条切线$\}$；

$\mathrm{S}_2=\{(x,y)\mid$过(x,y)只可以作该抛物线的一条切线$\}$；

$\mathrm{S}_3=\{(x,y)\mid$过(x,y)不能作该抛物线的切线$\}$，

请分别求出这三个集合中的元素所满足的条件。

解　$a \neq 0$，不妨设$a > 0$，抛物线开口向上。过(x, y)可以作该抛物线两条切线当且仅当(x, y)在该抛物线的下方，即$y < ax^2 + bx + c$。同理当$a < 0$时，$y > ax^2 + bx + c$，因此

$$S_1 = \{(x, y) \mid a(ax^2 + bx + c - y) > 0\}。$$

过(x, y)只可以作该抛物线一条切线当且仅当(x, y)在该抛物线上，所以

$$S_2 = \{(x, y) \mid ax^2 + bx + c - y = 0\}。$$

由此得到

$$S_3 = (S_1 \cup S_2)^C = \{(x, y) \mid a(ax^2 + bx + c - y) < 0\}。$$

8.（1）设$f(x)$在$x = x_0$处可导，$g(x)$在$x = x_0$处不可导，证明$c_1 f(x) + c_2 g(x)$ $(c_2 \neq 0)$在$x = x_0$处也不可导。

（2）设$f(x)$与$g(x)$在$x = x_0$处都不可导，能否断定$c_1 f(x) + c_2 g(x)$在$x = x_0$处一定可导或一定不可导？

解　（1）记$h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$，当$c_2 \neq 0$时，如果$h(x)$在$x = x_0$处可导，则$g(x) = [h(x) - c_1 f(x)] / c_2$在$x = x_0$处也可导，从而产生矛盾。

（2）不能断定。如$g(x) = f(x) = |x|$，当$c_1 = -c_2$时，$c_1 f(x) + c_2 g(x)$在$x = 0$处是可导的；当$c_1 \neq -c_2$时，$c_1 f(x) + c_2 g(x)$在$x = 0$处不可导。

9. 在上题的条件下，讨论$f(x)g(x)$在$x = x_0$处的可导情况。

解　函数$f(x) = c$在$x = 0$处可导，$g(x) = |x|$在$x = 0$处不可导，则$f(x)g(x)$当$c = 0$时在$x = 0$处可导，当$c \neq 0$时在$x = 0$处不可导。

函数$f(x) = g(x) = |x|$在$x = 0$处都不可导，但$f(x)g(x) = x^2$在$x = 0$处可导。函数$f(x) = g(x) = \operatorname{sgn}|x|$在$x = 0$处都不可导，$f(x)g(x) = \operatorname{sgn}|x|$在$x = 0$

处也不可导。

10．设 $f_{ij}(x)$ （$i, j = 1,2,\cdots,n$）为同一区间上的可导函数，证明

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}。$$

证 根据行列式的定义

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)} f_{1k_1}(x) f_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x)$$

$$= \sum(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}[\, f'_{1k_1}(x) f_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x) + f_{1k_1}(x) f'_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x) + \cdots$$

$$+ f_{1k_1}(x) f_{2k_2}(x)\cdots f'_{nk_n}(x)]$$

$$= \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & \cdots & f'_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & \cdots & f'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{n1}(x) & f'_{n2}(x) & \cdots & f'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}。$$